



FORUM GURU BESAR
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG



Orasi Ilmiah Guru Besar Institut Teknologi Bandung



KETAKLINEARAN Signifikansi-, Kerumitan-, dan Hampirannya

Profesor Johan Matheus Tuwankotta
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Bandung

**Aula Barat ITB
6 Desember 2025**

Orasi Ilmiah Guru Besar
Institut Teknologi Bandung

KETAKLINEARAN:
Signifikansi-, Kerumitan-,
dan Hampirannya

Orasi Ilmiah Guru Besar
Institut Teknologi Bandung

KETAKLINEARAN:
Signifikansi-, Kerumitan-,
dan Hampirannya

Prof. Johan Matheus Tuwankotta

6 Desember 2025
Aula Barat ITB



Hak cipta © pada penulis dan dilindungi Undang-Undang

Hak penerbitan pada ITB Press

Dilarang memperbanyak sebagian atau seluruh bagian dari buku ini tanpa izin dari penerbit

Orasi Ilmiah Guru Besar Institut Teknologi Bandung:

Ketaklinearan: Signifikansi-, Kerumitan-, dan Hampirannya

Penulis : Prof. Johan Matheus Tuwankotta

Reviewer : Prof. Hendra Gunawan

Editor Bahasa : Rina Lestari

Cetakan I : 2025

ISBN : 978-623-297-836-2

e-ISBN : 978-623-297-837-9(PDF)

ITB PRESS

📍 Gedung STP ITB, Lantai 1,
Jl. Ganesa No. 15F Bandung 40132
☎ +62 22 20469057
🌐 www.itbpress.id
✉ office@itbpress.id
Anggota Ikapi No. 043/JBA/92
APPTI No. 005.062.1.10.2018

יִרְאַת יְהוָה רֵאשִׁית דָּעַת

The fear of the LORD is the beginning of knowledge

PRAKATA

"It is the mark of an educated mind to rest satisfied with the degree of precision which the nature of the subject admits and not to seek exactness where only an approximation is possible."

—Aristotle

Tulisan ini merupakan refleksi perjalanan penulis di dunia matematika sejak pertama kali *berkenalan* dengan perilaku taklinear pada tahun 1997, hingga saat ini. Secara khusus, ketaklinearan yang ditinjau adalah ketaklinearan dalam sistem dinamik dan aplikasinya di berbagai bidang ilmu. Tulisan ini tidak bertujuan memperlihatkan deskripsi lengkap dari dinamika sistem-sistem yang ditinjau, melainkan hanya selayaknya cuplikan-cuplikan untuk memperlihatkan signifikansi, kerumitan dan bagaimana cara mempelajari ketidaklinearan.

Satu-satunya kata kunci yang penting untuk disimpan di dalam ingatan kita dalam membaca tulisan ini adalah kata aproksimasi, atau hampiran. Ide yang ingin disampaikan dalam tulisan ini adalah bahwa aproksimasi bukan hanya sebuah usaha terakhir untuk mengerti hal yang sulit, melainkan sebuah perjalanan indah dan informatif dalam mendekati sebuah pengertian. Teori aproksimasi adalah sebuah keindahan matematis yang diperlihatkan dengan: menemukan sebuah estimasi dari besaran yang mungkin tidak terdefinisi dengan baik. Atau juga dengan memberikan gambaran kualitatif dari sebuah *solusi yang tidak eksak*, atau dengan bahasa yang lebih tegas: *solusi yang salah*, namun tetap informatif dalam memberikan gambaran tentang solusi sebenarnya.

Hampir tidak ada hal yang baru dalam tulisan ini. Yang mungkin berbeda adalah cara pandang terhadap masalah-masalah yang telah dianalisis, dan dipublikasikan di berbagai jurnal ilmiah, sebagian besar oleh penulis sendiri. Harapan penulis adalah tulisan ini bisa memberikan sebuah inspirasi untuk

terjun dalam bermatematika, untuk berani menggunakan apa yang ada dan mencoba menjawab permasalahan yang dihadapi.

Bandung, 10 Agustus 2025

Johan Matheus Tuwankotta

SINOPSIS

Tujuan tulisan ini adalah:

1. Sebagai sebuah argumentasi mengapa penting untuk mempelajari ketidaklinearan;
2. Memperlihatkan kerumitan yang dapat timbul dalam analisis sistem taklinear; dan
3. Mendeskripsikan bifurkasi menarik dan dinamika tak trivial dalam sistem-sistem taklinear.

Dimulai dengan mendiskusikan apa yang dimaksud dengan ketidaklinearan, pada Bagian 1. Pendekatan yang digunakan adalah dengan contoh-contoh untuk menjelaskan konsep ketaklinearan. Bagian 2 didedikasikan untuk memperlihatkan ketaklinearan pada berbagai bidang Dinamika Populasi dan bidang Seni. Pada bidang Dinamika Populasi penulis berargumentasi bahwa ketidaklinearan bukan hanya nyata, tetapi juga diperlukan untuk mendapatkan gambaran yang lebih tepat dengan dunia nyata. Di sisi lain, hadirnya ketaklinearan dalam dunia Seni menyajikan sebuah sensasi yang sangat berbeda. Pada Bagian 3, kita memulai perjalanan dengan mendeskripsikan salah satu fitur dari Ketidaklinearan pada sistem getaran linear yang berpasangan, yaitu: perpindahan energi dari satu getaran ke getaran lainnya. Pada Bagian 4, pengertian Bifurkasi secara informal diberikan dan diterapkan pada Sistem Pemangsa-Mangsa. Pada Bagian 5 kembali sistem getaran yang berpasangan dibahas. Kali ini, penekanan diberikan pada bagian Ketaklinearan dari sistem yang mempertahankan energi. Bagian 6, mencoba memperlihatkan dua sumber lain dari ketidaklinearan, yaitu dari syarat batas dari Persamaan Diferensial Parsial, dan dari sebuah gaya impulsif yang bergantung terhadap posisi. Kesimpulan disajikan pada Bagian 7.

DAFTAR ISI

PRAKATA.....	vii
SINOPSIS	ix
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR TABEL.....	xv
1. APA ITU KETAKLINEARAN	1
2. KETAKLINEARAN DI BERBAGAI BIDANG.....	3
2.1 Ketaklinearan pada dinamika populasi.....	3
2.2 Ketaklinearan dalam dunia seni	4
3. GETARAN TAKLINEAR	9
4. BIFURKASI PADA DINAMIKA POPULASI.....	15
4.1 Dinamika Taklinear Dan Bifurkasi Pada Model Mangsa- Pemangsa	15
4.2 Lebih Jauh Tentang Bifurkasi Fold.	18
3.3 Teori <i>Catasthrope</i>	20
5. KETAKLINEARAN YANG MEMPERTAHANKAN ENERGI	23
6. KETAKLINEARAN LAINNYA	31
6.1 Ketaklinearan Pada Syarat Batas.	31
6.2 Chaos Dan Keteraturan.....	34
7. APA YANG TELAH DIPELAJARI.....	37
8. UCAPAN TERIMA KASIH	43
DAFTAR PUSTAKA	45
CURRICULUM VITAE	49

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1	Grafik fungsi yang taklinear (garis tegas), namun merupakan kombinasi linear dari fungsi-fungsi basisnya. Grafik putus-putus adalah contoh fungsi taklinear yang tidak dapat dinyatakan dengan kombinasi linear (berhingga) dari fungsi-fungsi batasnya.2
Gambar 2	Tata letak tak standar dalam buku <i>Houses of Leaves</i> . (Sumber gambar: https://www.honest-broker.com/p/house-of-leaves-by-mark-z-danielewski).6
Gambar 3	Torus di \mathbb{R}^4 yang disisipkan ke \mathbb{R}^3 . Pada gambar ini Torus tersebut dipotong.10
Gambar 4	Irisan Poincaré yang memperlihatkan interaksi energi antara kedua getaran linear pada kasus resonansi 2:1 (kiri) dan resonansi 6:1 (kanan). Gambar kanan direproduksi dari [Ver2001].12
Gambar 5	Bifurkasi Swallowtail yang dialami oleh solusi periodik. Dibutuhkan tiga parameter yang diperlukan untuk mendapatkan bifurkasi ini. Parameter α dan β berasal dari fungsi taklinear $P(x)$ sedangkan ε berasal dari perumuman (4.3). Direproduksi dari [Har2016].....17
Gambar 6	Solusi chaotic akibat torus invarian yang menjadi tidak stabil kemudian hancur pada Sistem (4.1) dengan penambahan suku (4.3). Direproduksi dari [Twk2019A].....18
Gambar 7	Mengiris donut dengan pisau tipis. Diambil dari https://medium.com/intuition/mathematics-and-geometry-3a177d98fa8320
Gambar 8	Kerucut $\kappa_1 r^2 - \kappa_2 (x^2 + y^2) = 0$ yang membagi \mathbb{R}^3 menjadi dua bagian diprojeksikan ke bidang $(0, y, r)$. Pada bagian abu-abu, solusi bergerak dari R kecil ke R besar, daerah putih yang sebaliknya. Direproduksi dari [Twk2003A].....24
Gambar 9	Pertukaran energi antar getaran linear dekat dinamika homoklinik. Direproduksi dari [Twk2003B].25

Gambar 10 (Kiri) Solusi yang hidup di dalam sebuah torus stabil (garis putus-putus) dan solusi periodik tak stabil (garis tegas). (Kanan) Dinamika di sekitar orbit yang mirip dengan orbit homoklinik. Ketika torus pada gambar kiri hilang, solusi periodik yang tidak stabil turut andil dalam menciptakan dinamika yang mirip dengan dinamika homoklinik. Direproduksi dari [Twk2003B]. 26

Gambar 11 Barisan bifurkasi *Period-Doubling*. Direproduksi dari [Adi2008]. 27

Gambar 12 Masalah Stefan: perluruhan es ketika salah satu ujungnya diberikan fluks panas. Batas antara fase cairan dan fase padat senantiasa bergerak ke kana sehingga persamaan perambatan panas pada cairan merupakan persamaan diferensial parsial dengan syarat batas bergerak. 31

Gambar 13 Solusi [Ihsan202] bertahan lebih lama untuk tetap dekat dengan solusi similaritas. Hasil [3,17] adalah hasil dari [Cald2003] dan [Par2019]. Direproduksi dari [Ihsan2022] 33

Gambar 14 Getaran senar pada alat musik sitar 33

Gambar 15 Dinamika Pemetaan (6.2) yang memiliki kompleksitas yang tinggi. 34

DAFTAR TABEL

Tabel 1	Berbagai resonansi pada pendulum elastis. Pangkat suku resonansi memperlihatkan suku tak trivial pertama yang muncul dalam aproksimasi sebagai monomial pangkat N . Ukuran interaksi energi dinyatakan oleh orde: ϵK . Nilai R dinyatakan pada kolom 3. Skala-waktu interaksi adalah orde dinamika di dalam resonansi dinyatakan oleh: ϵT	13
----------------	---	----

1. APA ITU KETAKLINEARAN

*"For want of a nail, the shoe was lost
For want of a shoe, the horse was lost
For want of a horse, the rider was lost
For want of a rider, the battle was lost
For want of a battle, the kingdom was lost
And all for the want of a horseshoe nail."*

Ketaklinearan adalah hubungan antara masukan (*input*) dan luaran (*output*) di mana perubahan luarannya tidak proporsional terhadap perubahan *input*-nya. Ketaklinearan juga dapat muncul pada suatu proses, atau mekanisme, atau pada sebuah sistem. Pada prinsipnya, ketaklinearan memberikan kita cukup ruang untuk mendapatkan luaran yang lebih kompleks, meskipun tidak selalu demikian.

Pengertian ketaklinearan tergambarkan dengan baik dalam puisi di atas. Puisi ini pertama kali diperkenalkan oleh G. Herbert dalam *Outlandish proverbs, selected by Mr. G.H.* ([Her1640]) dalam bentuk yang lebih pendek. Bentuk yang lebih panjang (seperti pada puisi yang dicantumkan di atas) adalah versi yang dikatakan oleh Benjamin Franklin pada tahun 1758 (dalam [Frank1758]). Dari puisi tersebut, kita melihat sebuah fitur dari ketaklinearan: adanya sebuah eskalasi dampak.

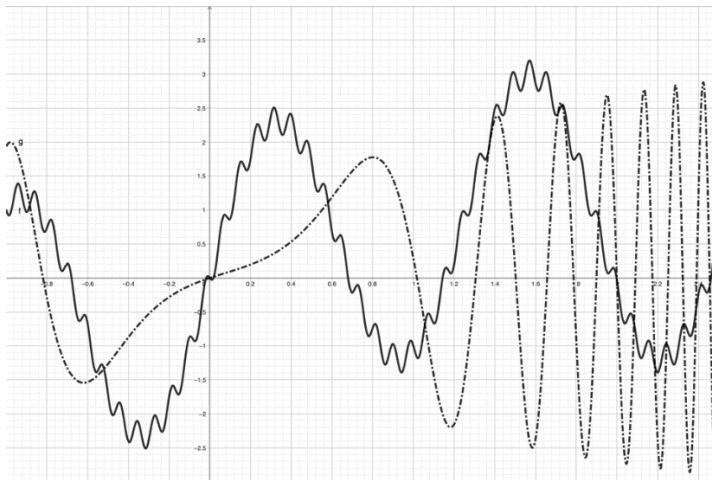
Sebuah contoh lain, grafik dari sebuah fungsi linear $y = f(x) = mx + c$ yang berbentuk garis lurus. Dalam sebuah fungsi linear seperti itu, selisih nilai x dan x_0 yaitu sebesar Δx diubah menjadi selisih dalam $y = f(x)$ dan $y_0 = f(x_0)$, yaitu sebesar Δy , yang proporsional terhadap Δx , yaitu: $\Delta y = m\Delta x$. Konstanta m ini tidak bergantung pada x_0 . Artinya, di mana pun pada sumbu x , perbandingan antara Δy dan Δx senantiasa tetap, yaitu sebesar gradien fungsi linear tersebut.

Tidak demikian jika kita bekerja dengan fungsi taklinear, misalkan $y = f(x) = x^2$. Di sekitar x_0 selisih sebesar Δx akan menjadi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

Jika Δx cukup kecil, maka perbandingannya cukup dekat ke $2x_0$. Untuk sebarang fungsi yang terdiferensialkan $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dapat dihipotesis dengan $f'(x_0)$. Jadi, untuk fungsi taklinear besar $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bergantung dari lokasi di mana kita mengukurnya.

Bagaimana dengan fungsi-fungsi yang grafiknya seperti pada Gambar 1? Grafik fungsi yang digambarkan dengan garis tegas adalah grafik fungsi yang taklinear: $f(x) = \sin(x) + 2 \sin(2x) - \frac{1}{10} \sin(10x) + \frac{1}{5} \sin(100x)$.



Gambar 1 Grafik fungsi yang taklinear (garis tegas), namun merupakan kombinasi linear dari fungsi-fungsi basisnya. Grafik putus-putus adalah contoh fungsi taklinear yang tidak dapat dinyatakan dengan kombinasi linear (berhingga) dari fungsi-fungsi batasnya.

Fungsi taklinear tersebut (f) merupakan kombinasi linear dari keluarga fungsi $\{1, \sin(nx), \cos(mx) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Grafik kedua yang digambarkan dengan garis putus-putus pada Gambar 1 merupakan grafik fungsi $g(x) = \frac{\cos(x)+3,5x^2}{x^2+1} \sin(x - x^2 + 3x^3)$. Jika kita perhatikan kedua grafik, grafik kedua memperlihatkan perilaku yang secara kualitatif berbeda di daerah yang berbeda pada sumbu x ketimbang grafik pertama yang lebih repetitif.

Dikatakan fungsi taklinear f yang dapat dituliskan menjadi jumlahan hingga fungsi-fungsi taklinear lain (yang disebut basis), dikatakan memiliki resolusi yang hingga. Tidak demikian dengan g . Selain eskalasi dampak, resolusi yang tak berhingga menjadi ciri dari hadirnya ketaklinearan.

2. KETAKLINEARAN DI BERBAGAI BIDANG

Pada bagian ini kita akan melihat dua contoh ketaklinearan dalam kehidupan sehari-hari. Contoh pertama adalah pada sebuah model pertumbuhan (dinamika populasi). Pada contoh ini sangat wajar ketaklinearan muncul (bahkan diperlukan) karena terkait dengan masalah sains. Contoh yang lebih menarik adalah yang kedua, di bidang seni.

2.1 Ketaklinearan pada Dinamika Populasi

Pada tahun 1798, Thomas Robert Malthus dalam bukunya *An Essay on the Principles of Population*, mencoba membangkitkan kesadaran akan potensi sebuah masalah sosial yang besar. Dalam buku itu Malthus mengatakan bahwa pertumbuhan populasi manusia mengikuti progresi geometris sedangkan pertumbuhan produksi makanan mengikuti progresi aritmetis. Pernyataan Malthus diterjemahkan sebagai: besarnya pertumbuhan populasi pada suatu saat berbanding lurus dengan ukuran populasi pada saat tersebut, yang kemudian dikenal sebagai hukum Malthus.

Hukum Malthus ini merupakan salah satu contoh perilaku linear, yaitu tingkat pertumbuhan yang proporsional terhadap ukuran populasinya. Secara matematis, hukum ini diterjemahkan sebagai persamaan diferensial linear berderajat satu dengan koefisien konstan. Akibatnya, menurut hukum Malthus ini populasi akan membesar tanpa batas. Namun ini tidak terjadi. Ini tidak berarti hukum Malthus salah, hanya saja ketika ukuran populasi menjadi sangat besar, ada mekanisme lain di alam yang mendominasi (menutupi) perilaku linearnya.

Pada tahun 1838, Pierre-François Verhulst memperkenalkan model logistik dengan menambahkan suku kuadrat (taklinear) pada model linear Malthus. Dampak dari penambahan suku ini adalah, jika ukuran populasi cukup kecil maka pertumbuhan linear akan mendominasi. Namun jika ukuran populasinya membesar, suku *taklinear* tersebut akan mengambil alih dengan cara memperlambat pertumbuhan. Lebih lanjut lagi, jika ukuran populasi menjadi lebih tinggi dari suatu batas yang disebut kapasitas lingkungan, maka akan terjadi fenomena pertumbuhan negatif, di mana banyaknya populasi akan berkurang.

Model taklinear ini lebih menggambarkan keadaan yang sesungguhnya terjadi di alam yang terbatas ini. Model pertumbuhan taklinear (model logistik) ini menggambarkan fenomena di alam yaitu: kompetisi akses pada sumber makanan.

2.2 Ketaklinearan dalam Dunia Seni

Pada tahun 1999, seorang sutradara dan produser film bernama Paul Thomas Anderson melahirkan sebuah karya yang luar biasa berjudul *Magnolia*. Film ini menggunakan cara penyajian cerita (*storytelling*) yang taklinear. Cara ini pertama diperkenalkan oleh D.W. Griffith dalam karyanya yang berjudul *Intolerance* (1916). Ciri utama progresi taklinear dalam alur penyajian cerita ditandai dengan disajikannya bagian-bagian dari cerita yang tidak runut berdasarkan urutan kronologi waktu. Bukan hanya menggunakan teknik yang kilas balik (*flashback*), tetapi juga kilas maju (*flashforward*).

Dalam film *Magnolia*, ada sepuluh karakter utama, yang jalan ceritanya disajikan secara paralel, seperti tidak berkaitan satu sama yang lainnya. Mereka hanya ditampilkan berada bersama-sama pada suatu waktu, atau secara kebetulan berada ditempat yang sama, atau sedang mendengarkan lagu yang sama. Selain kilas balik, ada juga kilas maju dalam alur ceritanya sehingga menyaksikan film ini memberikan sebuah sensasi yang berbeda, walau tidak jarang membingungkan.

Ada sekurangnya tiga puluh tiga lembaga penghargaan yang menganugerahi film *Magnolia* ini di berbagai katagori. Misalnya, *The Academy Awards* menganugerahi *Best Supporting Actor*, *Best Screenplay*, *Best original Song* untuk film unik berjudul *Magnolia* ini.

Dalam dunia seni musik klasik, tidak berlebihan jika menyebutkan nama Béla Bartók sebagai salah satu komposer era romantis akhir-modern. Dalam karyanya: *Concerto for Orchestra* (1943) merupakan karya monumental yang menggunakan progresi taklinear. Mengikuti saat demi saat dalam konserto ini, kita seperti dibawa kepada sebuah perjalanan yang sangat menarik dengan ditandai oleh sebuah kalimat-kalimat musikal yang serupa tetapi tidak sama persis, muncul dalam eskalasi emosi yang meningkat, disuarakan secara periodik. Di antara repetisi periodik kalimat tersebut tersebut, diisi dengan interaksi antar instrumen yang dinamis dan bervariasi.

Dalam karyanya yang lain, *Violin Concerto nr 2* (1937-1938). Konserto ini bukan hanya mempertunjukkan kepiawaian dari sang pemain biola, tetapi juga kepiawaian sang komposer dalam meramu emosi pendengarnya. Konserto ini bergerak dari suasana mental yang gelap dan muram, menuju ke suasana mental yang tenang dan introspektif. Konserto ini kemudian disimpulkan dalam suasana yang energetik dan mendebarkan. Seperti juga pada *Concerto for Orchestra*, Béla Bartók menggunakan tangga nada yang tak standar, yang menambah warna pada ketaklinearan musiknya.

Dalam dunia musik jazz, sangat relevan jika menyebutkan nama Dave Brubeck dan karyanya, *Take Five* yang fenomenal. Dalam lagu ini Dave Brubeck menggunakan hitungan birama $5/4$ ketukan yang unik. Karena ketukan yang unik ini sulit untuk diikuti, Dave membangun ritme dengan menggunakan dua akord yang repetitif sepanjang komposisinya. Dalam musik rock, komposisi *Black Dog* juga mengindikasikan adanya ketaklinearan dalam bentuk ketukan drum yang seperti tidak tepat dengan melodi di atasnya.

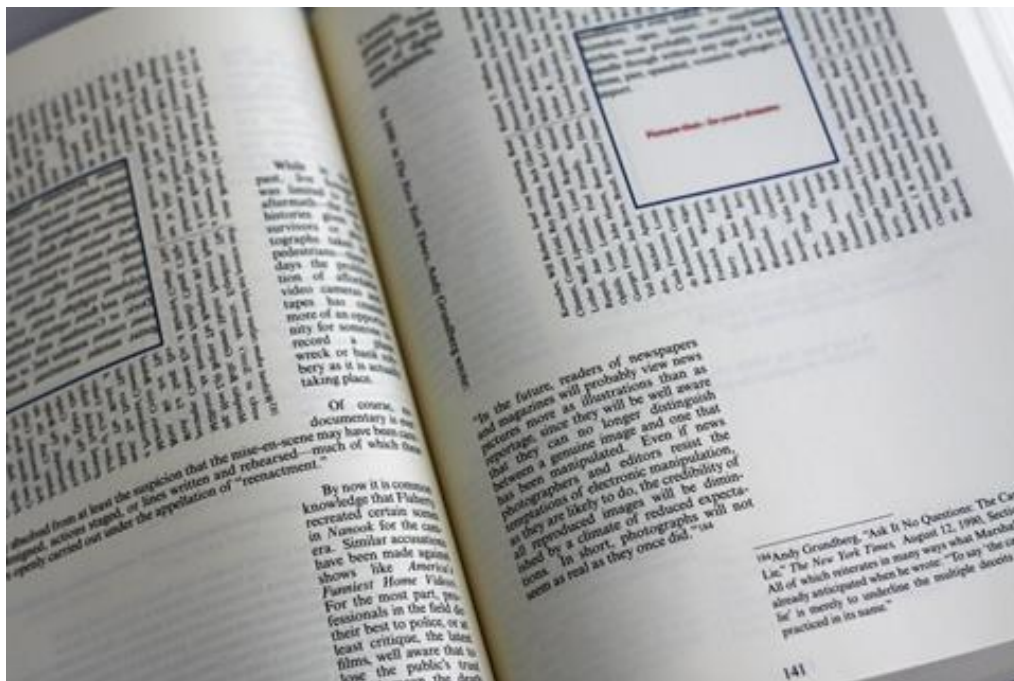
Progresi ketaklinearan dalam bentuk lain terdengar pada komposisi Wayne Shorter pada album Miles Davis berjudul *Nefertiti* (1967). Dalam sebuah wawancara, Wayne Shorter bercerita tentang bagaimana komposisi tersebut terbentuk. Pada komposisi standar, alat musik seperti terompet dan saksofon biasanya memainkan melodi utama sedangkan piano, bass, dan drum memainkan ini bagian ritme. Ketika kwintet ini memainkan komposisi ini di ruang rekaman, Miles Davis memberi tanda untuk terompet (Miles Davis) dan saksofon (Wayne Shorter) agar memainkan kalimat melodi yang repetitif (dengan sedikit variasi) sebagai penanda birama. Sedangkan alat musik lain seperti piano (Herbie Hancock), drum (Tony Williams) dan bass (Ron Carter) berimprovisasi di antara melodi repetitif tersebut. Dengan demikian, Miles Davis membalik peran solois dan bagian ritme, dan menciptakan sebuah komposisi yang luar biasa.

Baik dalam musik klasik, jazz maupun rock, ketaklinearan dalam musik dinyatakan (diracik) melalui salah satunya penggunaan tangga nada yang tidak standar. Meskipun demikian, nada yang diracik tetap sebanyak 12 nada. Atau, jika racikannya melibatkan ketukan birama yang tidak biasa, namun pada akhirnya tetap ada periodisitas dalam lagu komposisi tersebut. Atau, jika peranan berbagai instrumen yang ditata ulang secara berbeda dengan pagu

yang biasa, namun tetap mengandung unsur yang sama: melodi dan harmoni. Ketaklinearan membuat kita kagum pada betapa banyaknya kombinasi ramuan yang bisa didapatkan dari sejumlah hingga nada, ketukan birama, atau instrumen musik.

" There's 12 notes that have been floating around the universe for 720 years now, and we have those same 12 notes that Brahms, Bach, and Beethoven had. We need you, your gifts, and your talents. There's a saying that trauma is frozen at the peak, and if you stay trapped at the top, you'll die."
—Quincy Delight Jones (1933-2024)

Dalam dunia sastra, *The Sound and the Fury* karya William Faulkner (1929), dan *House of Leaves* karya Mark Z. Danielewski (2000) adalah dua contoh dari novel yang menggunakan progresi taklinear dalam cara bercerita kedua penulis. Danielewski bahkan menggunakan teknik yang tidak standar dalam tata letak teks dalam halaman-halaman bukunya. Lihat Gambar 2.



Gambar 2 Tata letak tak standar dalam buku *Houses of Leaves*. (Sumber gambar: <https://www.honest-broker.com/p/house-of-leaves-by-mark-z-danielewski>).

Karya sastra yang taklinear ini pada dasarnya mirip dengan "gaya bercerita taklinear" yang digunakan oleh Paul Thomas Anderson dalam film *Magnolia*. Mark Z. Danielewski berjalan lebih jauh dengan menyediakan kotak kosong (lihat Gambar 2) untuk memberi kesempatan pembaca menambahkan sendiri versinya. Terkadang pembaca harus memrotasi buku tersebut untuk mengakses informasi dalam buku novel ini.

Ketaklinearan juga muncul dalam karya seni rupa seperti lukisan, dan seni patung. Pada prinsipnya, ketaklinearan di dunia seni merupakan upaya sang seniman untuk membentuk sensasi yang unik, yang tidak monoton, dan baru. Tidak jarang, sensasi tersebut membuat penikmatnya berdecak kagum akan keindahannya, atau malah mengerenyitkan dahinya tanda ketidakmengertiannya.

*"Complexity is a beauty beyond imagination
for the mind that can imagine beyond its complexity".*

3. GETARAN TAKLINEAR

Persamaan diferensial memiliki sejarah yang panjang di dalam Matematika dan aplikasinya di berbagai bidang. Persamaan diferensial digunakan sebagai model dalam masalah-masalah dalam sains yang melibatkan tingkat perubahan di berbagai bidang, seperti mekanika klasik (Newton, Lagrangian, maupun Hamiltonian), mekanika benda-benda langit, dinamika fluida, dinamika populasi, peluruhan radioaktif, masalah transfer panas, dan lain sebagainya.

Pada pergantian abad 19, seorang matematikawan, fisikawan, dan juga politikus, bernama Henri Poincaré merevolusi cara pandang dunia terhadap persamaan diferensial. Sebelumnya, studi tentang persamaan diferensial difokuskan pada pencarian solusi, baik dalam bentuk tertutup (*closed form*) maupun dalam bentuk implisit. Henri Poincaré merevolusi pandangan ini dengan mengalihkan fokusnya dari solusi umum jika diberikan sebuah kondisi awal, kepada perilaku kualitatif solusi-solusi khusus (yang lebih mudah didapatkan).

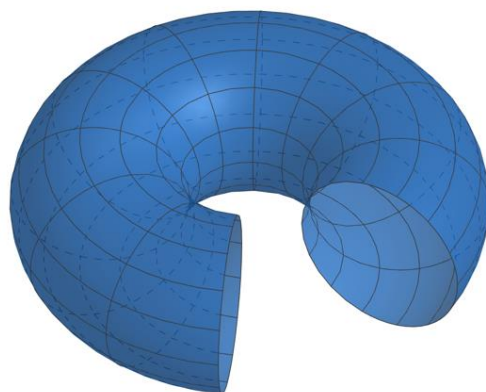
Contohnya, sangat sulit untuk mendapatkan solusi dari persamaan diferensial taklinear yang generik. Namun, kita mungkin cukup beruntung untuk bisa mendapatkan solusi khusus berupa ekuilibrium, sebab ini mungkin hanya melibatkan metode untuk menyelesaikan persamaan aljabar. Kemudian, dengan mempelajari kestabilan dari titik ekuilibrium tersebut, kita mendapatkan informasi tentang perilaku setiap solusi di daerah sekitar titik tersebut tanpa perlu menghitung solusi tersebut. Solusi sederhana tersebut kemudian diperumum dengan melibatkan solusi-solusi yang lebih kompleks seperti solusi periodik, solusi homoklinik, manifold invarian, dan lain sebagainya. Pendekatan ini disebut Sistem Dinamik.

Pandang sebuah sistem yang berisi dua oscilator yang dipasangkan secara taklinear:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_x^2 x &= -\varepsilon \frac{\partial U(x,y,\varepsilon)}{\partial x} \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y &= -\varepsilon \frac{\partial U(x,y,\varepsilon)}{\partial y}\end{aligned}\tag{3.1}$$

dengan ε adalah parameter kecil dan fungsi U yang terdiferensialkan secukupnya. Sistem Persamaan (3.1) tidak lain adalah persamaan Newton dengan derajat kebebasan dua, dan memiliki konservasi energi mekanik.

Salah satu contoh fisis yang dimodelkan oleh sistem seperti yang ditinjau adalah *pendulum elastik*. Bayangkan ayunan sebuah massa yang tergantung dengan menggunakan pegas. Maka massa tersebut "dapat" bergetar (berayun) seperti layaknya sebuah pendulum biasa, dan juga dapat bergerak turun naik seperti sistem pegas massa. Kedua gerakan ini disebut getaran linear dari sistem (*linear modes*), yaitu solusi yang kita dapatkan jika suku taklinear pada sistem diabaikan. Perbandingan frekuensi getaran linear pada sistem tersebut: $\omega_x : \omega_y$, dikenal dengan nama resonansi.



Gambar 3 Torus di \mathbb{R}^4 yang disisipkan ke \mathbb{R}^3 . Pada gambar ini Torus tersebut dipotong.

Misalkan kita memandang sistem (3.1) pada sebuah manifold energi $E_0 = E_1 + E_2$, di mana E_1 adalah banyaknya energi yang kita berikan pada x sedangkan E_2 pada y . Jika ketidaklinearan pada sistem persamaan (3.1) tidak hadir, yaitu jika $\varepsilon = 0$, maka kedua getaran linear tidak berinteraksi. Dapat disimpulkan bahwa solusi dari (3.1) akan hidup di dalam sebuah torus di \mathbb{R}^4 (lihat Gambar 3). Ini dapat dimengerti dengan memandang setiap $E_1 \neq 0$ mendefinisikan sebuah aksi S^1 di ruang fase (demikian pula $E_2 \neq 0$). Torus ini dapat direalisasi dengan lebih mudah dengan menyisipkannya ke \mathbb{R}^3 kemudian mengirisnya dengan sebuah bidang yang transversal terhadap torus tersebut. Teknik ini disebut Irisan Poincaré.

Jika $\varepsilon \neq 0$, sistem tersebut untuk sebarang resonansi tidak mudah untuk diselesaikan secara eksak (jika dapat). Salah satu cara untuk mempelajari sistem tersebut adalah dengan melakukan aproksimasi terhadap sistem tersebut. Untuk melakukan aproksimasi dengan baik, kita memerlukan kriteria untuk mengukur seberapa baik aproksimasi kita. Secara prinsip, kita ingin mendapatkan sistem yang lebih sederhana, namun tidak terlampau sederhana sehingga kehilangan esensi utama dari ketidaklinearannya.

Meskipun telah diperkenalkan oleh Lagrange tahun 1788 (namun tanpa bukti), baru di tahun 1930-an Krylov, Bogoliubov, dan Mitropolsky dari *Kiev School of Mathematics* melakukan penelitian intensif tentang Metode Perataan dan meyajikan bukti validitas asimtotiknya (lihat [Bog1961], lihat juga [San2007]).

Teorema Perataan: Misalkan diberikan sebuah sistem yang berbentuk:

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon),$$

di mana $x \in \mathbb{R}^n$ dan $\varepsilon \ll 1$, memiliki solusi $x(t)$ dengan syarat awal $x(0) = x_0$. Diasumsikan f terdiferensialkan secukupnya, periodik terhadap t dengan periode T . Pandang:

$$f_0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(y, t, 0) dt$$

yang adalah rata-rata dari f . Pandang persamaan diferensial:

$$\dot{y} = \varepsilon f_0(y),$$

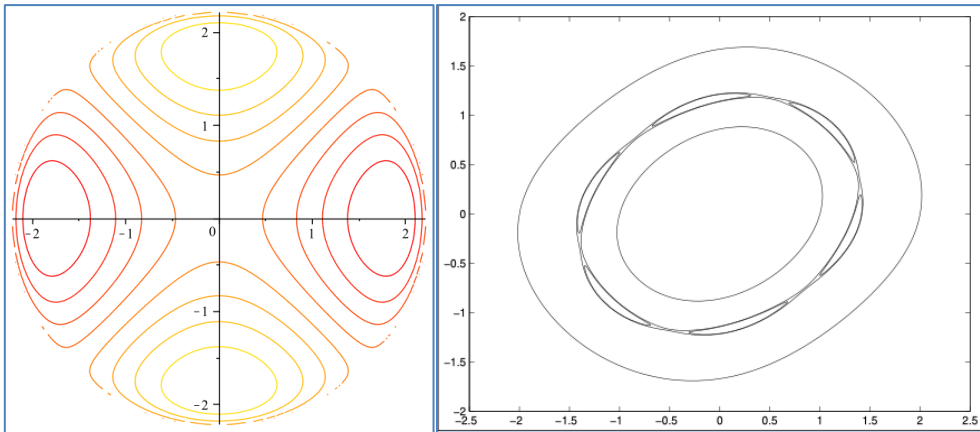
dengan $y(t)$ adalah solusinya yang memenuhi $y(0) = x_0$.

Maka $\|x(t) - y(t)\| = O(\varepsilon)$ pada skala waktu $\frac{1}{\varepsilon}$.

Teorema Perataan ini mengatakan bahwa solusi dari persamaan awalnya (yaitu x) dan persamaan rata-ratanya (yaitu y) dengan syarat awal yang sama senantiasa cukup dekat untuk skala waktu yang panjang. Jadi, y adalah aproksimasi untuk x .

Pada metode perataan, kita melakukan transformasi koordinat yang taklinear. Melalui transformasi ini, suku-suku taklinear yang tidak berpengaruh pada dinamika sistem dapat "didorong" ke derajat yang lebih tinggi. Suku berderajat lebih tinggi, senantiasa berkaitan dengan kontribusi yang lebih tidak signifikan pada dinamika sistem pada skala waktu tertentu. Suku-suku mana pada sistem yang dapat ditransformasikan ke derajat tinggi, bergantung dari resonansi pada sistem linearnya.

Secara umum, kita dapat mengklasifikasikan resonansi menjadi resonansi orde satu, dua dan orde tinggi. Sistem taklinear dengan resonansi orde satu (2:1, atau 1:2) dan dua (3:1, 1:1, atau 1:3), senantiasa berkorespondensi dengan dinamika yang aktif yang ditandai dengan pertukaran energi antargetaran linearnya (lihat [Burgh1976]). Pertukaran energi tersebut dapat diilustrasikan seperti Gambar 4 (kiri).



Gambar 4 Irisan Poincaré yang memperlihatkan interaksi energi antara kedua getaran linear pada kasus resonansi 2:1 (kiri) dan resonansi 6:1 (kanan). Gambar kanan direproduksi dari [Ver2001].

Dengan menerapkan metode perataan, bersama dengan F. Verhulst (lihat [Ver2001]), kami membuktikan bahwa pada resonansi tingkat tinggi ($m:n$ dengan $m:n \geq 5$) dinamika yang tak trivial terkonsentrasikan pada lingkungan berukuran kecil di sekitar sebuah submanifold yang dinamakan, manifold resonansi. Ukuran dari daerah ini sebanding dengan ukuran energi yang diberikan pada sistem pangkat suatu konstanta yang bergantung dari orde resonansinya.

Pada [San1977], J.A. Sanders mendeskripsikan bahwa interaksi antara kedua getaran linear untuk resonansi $m:n$ dengan $m+n \geq 5$ terjadi pada sebuah daerah yang disebut manifold resonansi. Orde ukuran dari manifold tersebut adalah ε^{m+n} dan skala waktu interaksinya adalah: $\varepsilon^{\frac{(m+n-4)}{6}}$. Dalam hal ini, interaksi antar getaran diartikan sebagai ukuran energi yang berpindah dari getaran di x ke pada getaran di y dan sebaliknya. Interaksi ini terjadi secara periodik (atau kuasi periodik). Orde dari waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan satu putaran dikenal dengan nama skala waktu interaksi.

Pada [Broek1988], van den Broek menemukan indikasi pertama bahwa orde pertukaran energi antar getaran dan skala waktunya yang diajukan J.A. Sanders, terlampau pesimis. Pada [Ver2001] dibuktikan bahwa orde ukuran pertukaran energi antar getaran adalah ε^{m+n-2} dengan skala waktu $\varepsilon^{\frac{(m+n-4)}{2}}$.

Hasil ini mengatakan bahwa resonansi tingkat tinggi sangat sulit untuk dideteksi secara numerik. Selain ukurannya yang kecil, dibutuhkan waktu integrasi numerik yang relatif panjang sehingga akurasi dari hasil metode numerik yang digunakan harus juga menjadi perhatian. Pada [Twk2003] bersama dengan G.R.W. Quispel (Latrobe University) kami menggunakan formula klasik dari Geometri Diferensial untuk menuliskan sebuah metode numerik yang memiliki tingkat akurasi yang cukup namun memiliki waktu integrasi yang sangat rendah.

Tabel 1 Berbagai resonansi pada pendulum elastis. Pangkat suku resonansi memperlihatkan suku tak trivial pertama yang muncul dalam aproksimasi sebagai monomial pangkat N . Ukuran interaksi energi dinyatakan oleh orde: ε^K . Nilai R dinyatakan pada kolom 3. Skala-waktu interaksi adalah orde dinamika di dalam resonansi dinyatakan oleh: ε^T

Resonansi	Pangkat Suku Resonansi (N)	Orde interaksi energi (K)		Skala-waktu interaksi (T)
		Analitik	Numerik	
4:1	5	1/2	0,5091568	-5/2
4:3	7	3/2	1,5079998	-7/2
6:1	7	3/2	1,4478968	-7/2
3:1	8	2	2,0898136	-4
8:1	9	5/2	NA	-9/2
3:2	10	3	NA	-5

Ide dari integrator numerik yang diterapkan pada [Twk2003A] adalah dengan memisahkan medan vektor dari sistem: $\dot{x} = X(x)$ menjadi jumlah dari tiga medan vektor $\dot{x} = X_1(x) + X_2(x) + X_3(x)$ yang masing-masing dapat diselesaikan secara eksplisit. Kemudian selesaian tersebut dikomposisikan

untuk menghampiri solusi dari $\dot{x} = X(x)$ dengan menggunakan formula klasik: Baker-Campbell-Hausdorff (lihat: [Olver1993, Yos1990]). Metode ini sangat efektif dalam masalah resonansi tingkat tinggi seperti didemonstrasikan pada [Twk2003] dengan waktu komputasinya yang hanya 65% dari integrator lain yang sebanding akurasinya.

Tabel 1 adalah kompilasi dari hasil-hasil pada [Ver2001] dan [Twk2003A]. Prediksi analitik yang didapat dengan metode perataan dan hasil numerik didapat dengan tingkat kemiripan yang tinggi, kecuali untuk resonansi 6:1 yang agak rendah dibandingkan dengan resonansi lain.

Simetri. Sebuah fungsi $f(x, y)$ dikatakan simetrik terhadap y jika memenuhi: $f(x, -y) = f(x, y)$. Pada Sistem (3.1), ketika $U(x, -y) = U(x, y)$ maka Sistem (3.1) dikatakan simetrik terhadap y . Peran simetri ini adalah mengubah urutan (dan akibatnya, signifikansi dari resonansi tersebut). Sebuah sistem yang simetrik terhadap y , akan menyebabkan resonansi 2:1 menjadi 4:2.

Sebagai contoh, pada masalah pendulum elastis. Sistem oscilator pada masalah ini adalah sistem Hamiltonian dengan fungsi Hamiltonian:

$$H = \frac{1}{2ml} \left(p_z^2 + \frac{p_\varphi^2}{(z+1)^2} \right) + \frac{sl^2}{2} \left(z + \frac{l-l_0}{l} \right)^2 - mgl(z+1) \cos(\varphi).$$

Dalam fungsi ini, (z, p_z) adalah posisi dan momentum gerakan massa m pada arah radial, sedangkan (φ, p_φ) pada arah angular. Karena $H(z, -\varphi, p_z, -p_\varphi) = H(z, \varphi, p_z, p_\varphi)$ maka sistem ini simetrik terhadap (φ, p_φ) . Dengan demikian, resonansi $\omega_z : \omega_\varphi = 2 : 1$ tidak dapat muncul, kecuali dalam bentuk: 4:2. Simetri ini juga dapat diobservasi secara fisis: kita tidak dapat membedakan apakah kita sedang mengamati gerakan pendulum tersebut secara langsung atau kita sedang mengamati bayangan gerakannya di cermin. Kaitan antara simetri (diskrit) dan resonansi secara detail dibahas pada [Ver2001].

4. BIFURKASI PADA DINAMIKA POPULASI

Seperti pada Bagian 2, dinamika populasi merupakan contoh di mana ketaklinearan bukan hanya hadir, tetapi diperlukan. Pada bagian ini kita akan melihat salah satu model dalam dinamika populasi, yaitu model Mangsa-Pemangsa. Model ini digunakan juga dalam berbagai model di bidang biologi molekular [Bal2008], kinematika enzim [Briggs1925], ekonomi [Cai2014,Good1967], dan lain-lain.

4.1 Dinamika Taklinear dan Bifurkasi pada Model Mangsa-Pemangsa

Pada tahun 1959, C.S. Holling memperkenalkan sebuah sistem yang memodelkan interaksi antara dua spesies. Model tersebut adalah:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - \lambda x) - yP(x) \\ \dot{y} &= y(-\delta - \mu y) + yP(x)\end{aligned}\tag{4.1}$$

dengan $P(x)$ adalah sebuah fungsi kontinu.

Sistem (4.1) adalah perumuman dari model yang sangat terkenal dalam dinamika populasi adalah model Lotka-Volterra. Model ini diperkenalkan pada tahun 1910 oleh Alfred J. Lotka untuk memodelkan suatu reaksi kimia tertentu. Model ini kemudian juga diperkenalkan secara independen oleh Vito Volterra (1926). Nama lain dari model Lotka-Volterra ini adalah Sistem Mangsa-Pemangsa.

Variabel x menyatakan ukuran populasi mangsa (dapat berupa kerapatan atau banyak individu) sedangkan variabel y menyatakan ukuran populasi pemangsa. λ adalah parameter kapasitas lingkungan (seperti yang diperkenalkan oleh P.F. Verhulst di bagian awal buku ini). Parameter μ pada dasarnya merupakan parameter yang serupa dengan λ , namun pada persamaan untuk pemangsa, parameter ini diinterpretasikan sebagai persaingan untuk hidup antarpemangsa.

Pada model Lotka-Volterra, selain parameter $\lambda = 0$ dan $\mu = 0$, fungsi $P(x) = bx$ yang adalah fungsi linear. Jadi sistem (4.1) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy \left(\frac{1}{y} - b \right) \\ \dot{y} &= xy \left(b - \frac{\delta}{x} \right).\end{aligned}$$

Dengan menggunakan sebuah transformasi penskalaan waktu yang bergantung pada variabel x dan $y : t \mapsto (xy)t$, sistem (4.1) ekuivalen secara topologi ekuivalen dengan

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left(\frac{1}{y} - b \right) \\ \dot{y} &= \left(b - \frac{\delta}{x} \right).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Sistem (4.2) memiliki integral dengan kurva ketinggian yang tertutup di kuadran I (lihat [Owen2020]). Dapat dikatakan bahwa segala informasi tentang perilaku fungsi telah diketahui jika $P(x) = bx$ (linear).

Hal menarik dari model yang diperkenalkan oleh C.S. Holling ini adalah pada fungsi: $P(x) = \frac{x}{\alpha x^2 + \beta x + 1}$. Ini bukan satu-satunya fungsi $P(x)$ yang diusulkan C.S. Holling, tetapi fungsi yang kita tinjau ini memiliki sifat yang khusus. Perhatikan bahwa jika x membesar tanpa batas maka $P(x)$ akan menuju ke nol. Suku $yP(x)$ menyatakan interaksi antara mangsa dan pemangsa dalam bentuk pemangsaan. Jadi, jika x cukup besar maka keberhasilan pemangsaan turun. Mekanisme ini disebut mekanisme pertahanan grup. Bayangkan kawanan banteng akan sulit dimangsa jika jumlahnya banyak.

Sebagai perumuman, kami meninjau Sistem (4.1) dengan mendefinisikan:

$$\lambda = \lambda_0(1 + \varepsilon \sin(\omega t)).\tag{4.3}$$

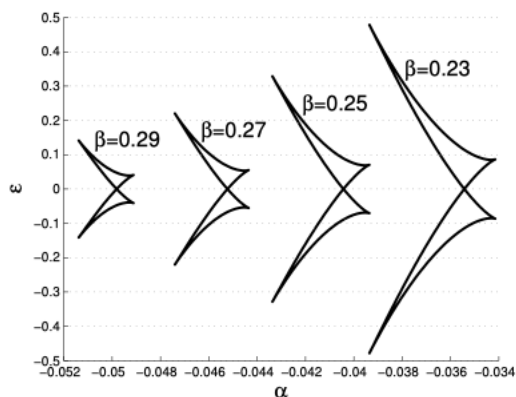
Perumuman ini dimaksudkan untuk memodelkan daya dukung lingkungan yang bervariasi musiman. Bayangkan air danau yang volumenya berubah secara musiman.

Sistem (4.1) bergantung pada lima parameter. Secara umum, perilaku solusi dari sistem (4.1) dapat berubah jika parameternya berubah. Yang menarik adalah ketika terdapat sebuah nilai parameter sehingga di sekitar nilai tersebut, perilaku solusi berubah secara katastrofik. Misalkan, pada saat $\delta < \delta_0$ Sistem (4.1) memiliki dua ekuilibrium yang bersatu saat $\delta = \delta_0$

kemudian hilang saat $\delta > \delta_0$. Peristiwa ini disebut Bifurkasi Fold, dan titik $\delta = \delta_0$ disebut titik Bifurkasi Fold.

Karena Sistem (4.1) juga bergantung dari parameter lain, misalnya μ , maka di ruang parameter, secara umum kita dapat mengkonstruksi kurva $\mu(\delta)$ sehingga pada setiap titiknya terjadi Bifurkasi Fold. Kurva ini disebut Diagram Bifurkasi Fold. Dalam banyak kasus, kita bisa memiliki lebih dari satu diagram bifurkasi, dan kedua diagram tersebut dapat beririsan (berpotongan) di suatu titik (δ_1, μ_1) . Titik ini menjadi titik Bifurkasi dengan kodimensi yang lebih tinggi, yaitu dua. Prinsip serupa dapat diterapkan untuk mendapatkan titik bifurkasi dengan kodimensi yang tinggi.

Selain bifurkasi Fold, bifurkasi lain yang berkodimensi satu adalah bifurkasi Hopf. Pada bifurkasi ini, ekuilibrium yang terlibat mengalami perubahan kestabilan. Selain itu sebuah solusi periodik tercipta setelah bifurkasi.

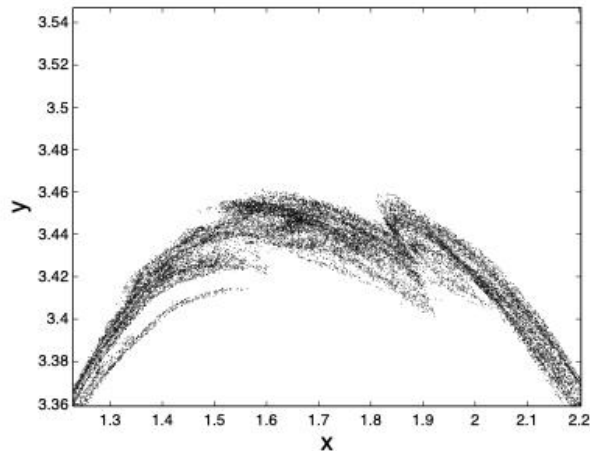


Gambar 5 Bifurkasi Swallowtail yang dialami oleh solusi periodik. Dibutuhkan tiga parameter yang diperlukan untuk mendapatkan bifurkasi ini. Parameter α dan β berasal dari fungsi taklinear $P(x)$ sedangkan ϵ berasal dari perumuman (4.3). Direproduksi dari [Har2016].

Bifurkasi dapat juga terjadi untuk solusi-solusi lain yang lebih kompleks seperti solusi periodik. Pada [Har2016] ditunjukkan secara numerik, bawa solusi peridik mengalami sebuah bifurkasi yang eksotis yaitu *swallowtail* (lihat Gambar 5). Bifurkasi ini merupakan bifurkasi yang berkodimensi tiga dan pada kasus kami, dialami oleh solusi periodik.

Selain itu, pada [Har2016] ditunjukkan secara numerik bahwa terdapat sebuah solusi periodik yang mengalami bifurkasi Hopf. Akibatnya tercipta

sebuah torus invariant pada sistem tersebut. Pada [Twk2019A] diperlihatkan bahwa torus ini kemudian menjadi tidak stabil dan hancur membentuk sebuah atraktor yang memiliki struktur fraktal. Jadi Sistem (4.1) pada daerah tertentu di ruang parameter *chaotic* (lihat Gambar 6).



Gambar 6 Solusi chaotic akibat torus invariant yang menjadi tidak stabil kemudian hancur pada Sistem (4.1) dengan penambahan suku (4.3). Direproduksi dari [Twk2019A].

4.2 Lebih Jauh Tentang Bifurkasi Fold.

Keunggulan dari pendekatan bifurkasi adalah kita dapat menemukan solusi-solusi khusus di sistem meskipun solusi-solusi tersebut tidak dapat ditemukan dengan *forward-time integration*. Kesulitannya, ada banyak pilihan parameter sehingga dapat saja ketika kita salah memilih parameter. Cara untuk mengatasi kesulitan ini adalah dengan mencoba terlebih dahulu untuk menganalisis masalahnya sebelum menerapkan metode numerik. Untuk bifurkasi Fold misalkan, kondisi yang biasanya diperiksa didapat dengan menghitung determinan dari matriks Jacobian di titik ekuilibrium tertentu. Harus diingat juga bahwa karena bifurkasi mendeskripsikan perilaku kualitatif ekuilibrium ketika parameternya divariasikan, maka hubungan eksplisit ekuilibrium dan parameternya dibutuhkan. Kemudian memeriksa determinan Jacobian di sana, akan membuat pekerjaan menjadi sangat rumit.

Pada tahun 2022, sebuah metode alternatif untuk memperoleh titik bifurkasi *fold* (yang berkode dimensi satu) dan titik bifurkasi *cusps* (yang berkode dimensi dua) diajukan pada [Owen2022]. Metode alternatif ini sebenarnya telah lama diterapkan pada penelitian-penelitian misalnya di

[Har2016, Adi2008, Twk2012], namun tanpa bukti. Pada [Owen2022] kami membuktikan bahwa Bifurkasi *fold* dapat dipandang sebagai masalah optimisasi berkendala, di mana metode pengali Lagrange bekerja dengan baik.

Keuntungan menggunakan metode alternatif ini adalah perhitungannya menjadi jauh lebih sederhana. Kita tidak terlibat dengan menghitung determinan dari sebuah matriks. Jika medan vektor yang dihadapi adalah polinom dengan derajat m , maka entri-entri dari sebuah matriks Jacobian $n \times n$ adalah polinom berderajat $m - 1$, maka kita akan terlibat dengan polinom berderajat $n(m - 1)$ jika melakukan perhitungan determinan Jacobian. Dengan pendekatan yang kami ajukan, perhitungan menjadi jauh lebih sederhana, hanya melibatkan polinom berderajat $m - 1$.

Pandang sistem persamaan

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, y) \\ \dot{y} &= G(x, y) - \beta.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Sistem ini mengalami bifurkasi *fold* di (x_0, y_0) ketika $\beta = \beta_0$. Maka: (x_0, y_0) adalah titik ekstremum dari $G(x, y)$ dengan kendala: $F(x, y) = 0$. Secara geometris, hal ini mudah diverifikasi. Jelas $G(x_0, y_0) = \beta_0$ (sebab (x_0, y_0) adalah ekuilibrium dari sistem. Misalkan (x_0, y_0) adalah titik minimum. Maka $G(x, y) < \beta_0$ adalah himpunan kosong di sekitar (x_0, y_0) , sedangkan $G(x, y) = \beta > \beta_0$ memiliki dua solusi. Hal serupa dapat diterapkan untuk titik maksimum.

Sebaliknya, misalkan (x_0, y_0, λ_0) adalah solusi dari Persamaan Lagrange:

$$\begin{aligned}\nabla G(x, y) &= \lambda \nabla F(x, y) \\ F(x, y) &= 0,\end{aligned}$$

dengan $\lambda_0 \neq 0$. Jika $\beta_0 = G(x_0, y_0)$, maka (x_0, y_0) adalah ekuilibrium dari sistem (4.4). Dapat diperlihatkan bahwa nilai eigen dari linearisasi sistem (4.4) di (x_0, y_0) adalah: 0 dan $\eta = \lambda_0 F_y(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)$. Asumsikan

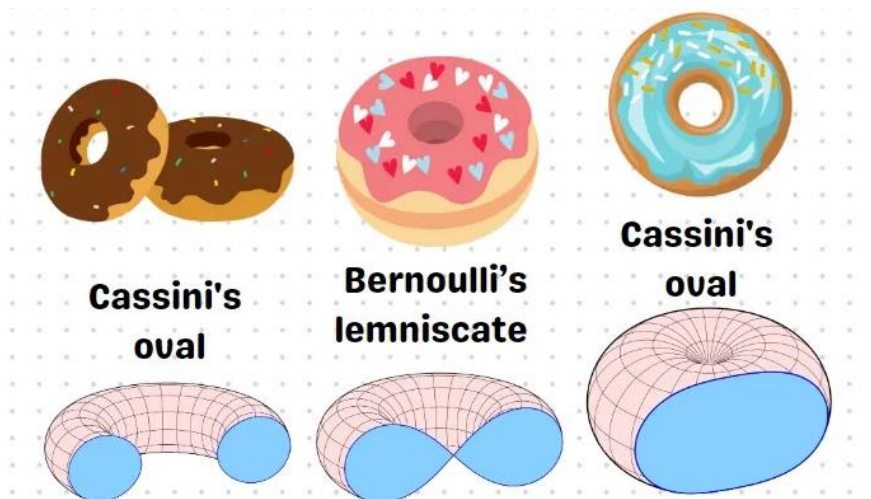
1. $\eta \neq 0$, dan
2. $(J\nabla F(x_0, y_0))^T (\lambda_0 A - B) J\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$

dengan J adalah matriks *symplectic*, A dan B adalah matriks Hessian dari F dan dari G . Maka (x_0, y_0) mengalami bifurkasi *fold* di $\beta = \beta_0$. Bukti dari bagian

kedua pernyataan tadi menggunakan Teorema Manifold Center. Lihat [Owen2022].

3.3 Teori *Catasthrope*

Pada sekitar tahun 1978, René Thom mendaftarkan apa yang disebutnya dengan tujuh *elementary catasthrope*. Pengertian *catasthrope* sendiri dapat digambarkan sebagai berikut. Bayangkan kita memiliki sebuah permukaan donut yang akan diiris dengan menggunakan sebuah pisau yang tipis. Maka penampang potongannya akan berbentuk dua lingkaran (jika pisaunya berada cukup ketengah). Kedua lingkaran bertemu jika pisau tepat di akhir lubang donut, dan kemudian menjadi satu buah kurva tertutup. Lihat Gambar 6. Perubahan ini dinamakan *catasthrope*.



Gambar 7 Mengiris donut dengan pisau tipis. Diambil dari <https://medium.com/intuition/mathematics-and-geometry-3a177d98fa83>

Ketujuh *elementary catasthrope* adalah sebagai berikut.

1. *Fold*
2. *Cusp*
3. *Swallowtail*
4. *Butterfly*
5. *Elliptic Umbilic*
6. *Hyperbolic Umbilic*
7. *Parabolic Umbilic*

Paper [Owen2022] juga membahas pengembangan dari aplikasi Metode Lagrange pada dua buah catastrophe pada daftar ini, yaitu *fold* dan *cusp*. *Catastrophe* ketiga muncul dalam paper [Har2016] (lihat Gambar 5).

Dalam bukunya *Bifurcation Theory and Catastrophe Theory*, V.I. Arnold [Arn2013] menjelaskan bahwa kata *catastrophe* diajukan untuk mengganti nama-nama yang sebelumnya digunakan, yaitu: *bifurcations*, atau *perestroika*, atau *methamorphosis*. Di kalangan peneliti sistem dinamik, kata yang lebih dikenal adalah *bifurcations* (bifurkasi), sedangkan di kalangan peneliti di bidang Geometri, dikenal dengan nama *Singularity Theory*.

Teori ini sempat menjadi primadona beberapa saat di akhir abad ke dua puluh. Teori ini digunakan untuk menjelaskan fenomena lompatan dalam persepsi di bidang Psikologi.

5. KETAKLINEARAN YANG MEMPERTAHAKAN ENERGI

Pada sebuah model untuk mempelajari dinamika fluida di atmosfer, teramati sebuah fenomena yang menarik. Fenomena tersebut adalah sebuah dinamika tertentu yang tampaknya seperti stabil. Seiring dengan penambahan waktu, sistem seperti tereksitasi dan berevolusi meninggalkan dinamika tersebut dan menjadi sangat aktif untuk kemudian kembali lagi pada dinamika awalnya. Pada [Crom2002], diajukan sebuah skenario sebagai salah satu alternatif penyebab fenomena tersebut, yaitu: adanya sebuah solusi yang homoklinik terhadap sebuah solusi yang bertipe saddle.

Model yang ditinjau adalah sebuah persamaan diferensial parsial yang dikenal dengan nama persamaan Navier-Stokes, yang melibatkan gaya luar. Dengan menggunakan *Empirical Orthogonal Functions*, model tersebut dapat direduksi menjadi sistem lima oscilator, dua di antaranya memiliki perbandingan frekuensi yang kira-kira: $1: 0,08$. Terinspirasi model ini, kami mempelajari sistem oscilator mirip seperti (3.1), namun dengan perbandingan frekuensi $1:\varepsilon$ dengan ε bilangan yang kecil yang juga merupakan ukuran dari ketaklinearannya. Model yang ditinjau adalah

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon N(x), x \in \mathbb{R}^4, \quad (5.1)$$

A adalah matriks dengan nilai eigen $\varepsilon\kappa_1 \pm \omega i$ dan $\varepsilon(\kappa_2 \pm i)$. Sebagai suku taklinearnya, dipilih bentuk kuadratik N yang sangat umum tetapi memenuhi:

$$N(x) \cdot x = 0, x \in \mathbb{R}^4. \quad (5.2)$$

Sifat ini untuk memodelkan ketaklinearan yang mempertahankan energi.

Dengan menggunakan metode perataan, diturunkan sebuah aproksimasi untuk sistem semula. Metode perataan yang diterapkan haruslah dimodifikasi agar dapat mempertahankan (5.2), lihat [Twk2004]. Sistem yang didapatkan memiliki struktur yang sangat menarik.

Sistem (5.1) dapat direduksi menjadi berdimensi tiga, di mana getaran pada koordinat (x_1, x_2) direpresentasikan oleh variabel r , sedangkan getaran pada koordinat pada (x_3, x_4) dengan (x, y) . Sistem berdimensi tiga tersebut berbentuk

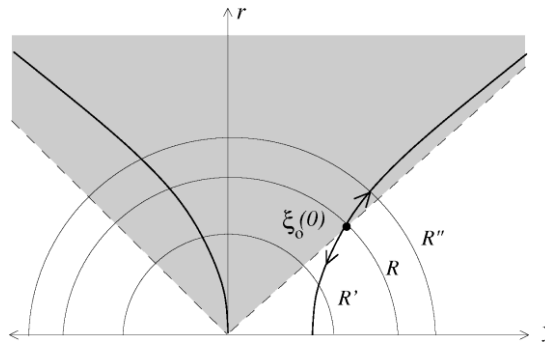
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \\ x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \kappa_1 r \\ -\kappa_2 x \\ -\kappa_2 y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta x r \\ \Omega(x, y)y - \delta r^2 \\ -\Omega(x, y)x \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

di mana $\Omega(x, y) = \omega + \alpha x + \beta y$.

Kita tahu bahwa: \mathbb{R}^3 difoliasi oleh permukaan bola: $r^2 + x^2 + y^2 = R^2, R \geq 0$ (bayangkan bawang bombay yang terdiri dari lapisan-lapisan) Perhatikan bahwa:

$$\frac{d}{dt} (r^2 + x^2 + y^2) = \varepsilon (\kappa_1 r^2 - \kappa_2 (x^2 + y^2)) \quad (5.4)$$

sepanjang solusi dari (3.3). Lebih jauh, persamaan $\kappa_1 r^2 - \kappa_2 (x^2 + y^2) = 0$ mendefinisikan sebuah kerucut (cone) di \mathbb{R}^3 . Di dalam daerah $\kappa_1 r^2 \geq \kappa_2 (x^2 + y^2)$, solusi (3.3) bergerak dari bola dengan R kecil ke R besar. Perhatikan pula bahwa $r = 0$ invarian terhadap aliran sistem (3.3)

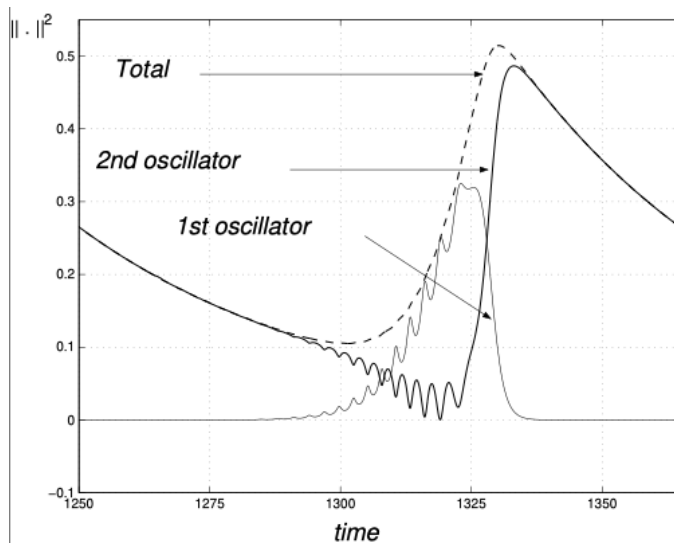


Gambar 8 Kerucut $\kappa_1 r^2 - \kappa_2 (x^2 + y^2) = 0$ yang membagi \mathbb{R}^3 menjadi dua bagian diprojsikan ke bidang $(0, y, r)$. Pada bagian abu-abu, solusi bergerak dari R kecil ke R besar, daerah putih yang sebaliknya. Direproduksi dari [Twk2003A]

Pandang situasi di mana $\varepsilon = 0$. Maka (5.4) sama dengan nol. Ini berarti solusi (5.3) berada pada permukaan bola dengan jari-jari R yang tetap. Karena $r = 0$ invarian terhadap aliran sistem (5.3), maka kita dapat memprojsikan solusi (5.3) tersebut ke cakram: $x^2 + y^2 \leq R^2$. Misalkan (x_0, y_0) adalah ekuilibrium yang *nondegenerate* dari sistem pada sebuah cakram dengan jari-jari R_0 . Dari hubungan $r^2 + x^2 + y^2 = R_0^2$, akan didapatkan r_0 . Dengan memvariasikan $R \in I_{R_0, \Delta} = (R_0 - \Delta, R_0 + \Delta)$ untuk suatu $\Delta > 0$, kita mendefinisikan: kurva: $R \mapsto (r_0(R), x_0(R), y_0(R))$. Kestabilan dari masing-masing ekuilibrium ini menentukan bagian mana dari kurva yang *attracting* dan bagian mana dari kurva yang *repelling*.

Ketika $\varepsilon \neq 0$, maka terjadi dinamika dengan skala waktu yang lebih lambat, yaitu εt ke arah yang transversal dari permukaan bola. Jika bagian dari kurva yang *attracting* berada dalam daerah abu-abu pada Gambar 7, maka dinamika sistem (5.3) akan mengikuti kurva ekuilibrium tersebut menjauhi titik asal, dan jika berada pada daerah putih, mendekati titik asal.

Seperti sebelumnya, dinamika sistem taklinear ini cukup menarik dengan ditandai oleh interaksi energi antara getaran linear, seperti yang diperlihatkan pada Gambar 8, atau juga solusi-solusi yang tidak trivial seperti pada Gambar 8. Pada Gambar 4 ini terlihat bahwa getaran pertama hampir tidak aktif (energinya nol), sedangkan energi pada getaran kedua berevolusi turun. Ketika energinya cukup rendah, energi getaran pertama dan terjadi pertukaran energi yang aktif antara kedua getaran sebelum akhirnya kembali pada kondisi awal.

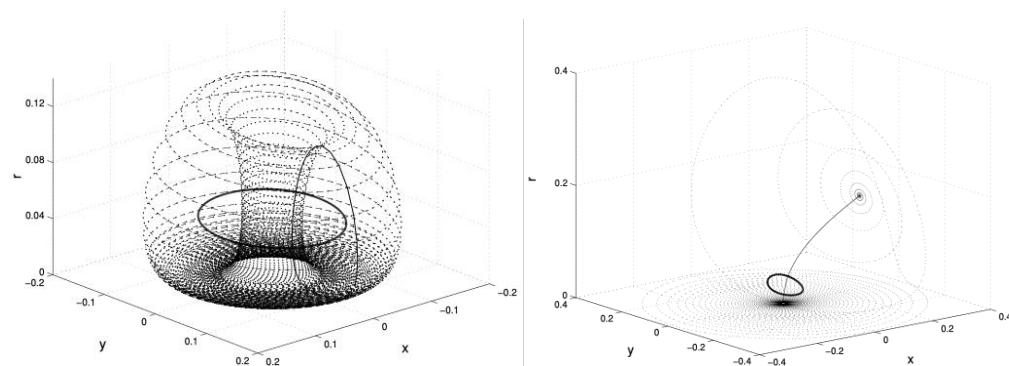


Gambar 9 Pertukaran energi antar getaran linear dekat dinamika homoklinik. Direproduksi dari [Twk2003B].

Berbeda dengan apa yang diajukan Crommelin, pada [Twk2003B] tidak ditemukan adanya orbit yang homoklinik. Orbit homoklinik adalah perpotongan antara manifold stabil dan manifold tak stabil dari sebuah ekuilibrium bertipe *saddle*. Pada Sistem (5.3), hanya ada satu buah ekuilibrium (yaitu titik asal) yang memiliki manifold stabil ($r = 0$) yang *infinitely flat* sehingga tidak dapat membentuk sebuah orbit homoklinik. Namun ada mekanisme lain yang terjadi akibat dari kombinasi dari frekuensi getaran

pertama yang relatif lebih besar dari getaran kedua, dan ketaklinearan yang memenuhi (5.2), yaitu adanya sebuah solusi periodik yang tak stabil di dalam sebuah torus.

Di daerah lain di ruang parameter, dinamika seperti homoklinik juga terjadi. Adanya parameter ε pada sistem membuat dinamika sistem (5.3) terpisah menjadi dinamika untuk skala waktu lambat dan skala waktu cepat. Pemisahan ini berdatap terciptanya sebuah manifold yang berisi ekuilibrium pada saat $\varepsilon = 0$. Ketika $\varepsilon \neq 0$, ekuilibrium-ekuilibrium ini lenyap, tetapi dinamika di sekitar manifold ini masih tetap serupa dengan saat $\varepsilon = 0$. Karena sebagian dari ekuilibrium pada saat $\varepsilon = 0$ tidak stabil, maka ketika memasuki lingkungan ekuilibrium yang tak stabil tersebut, dinamika sistem didorong keluar. Karena ketidak linearan (3.2), dinamika dipaksa untuk tetap mempertahankan jaraknya ke titik asal.

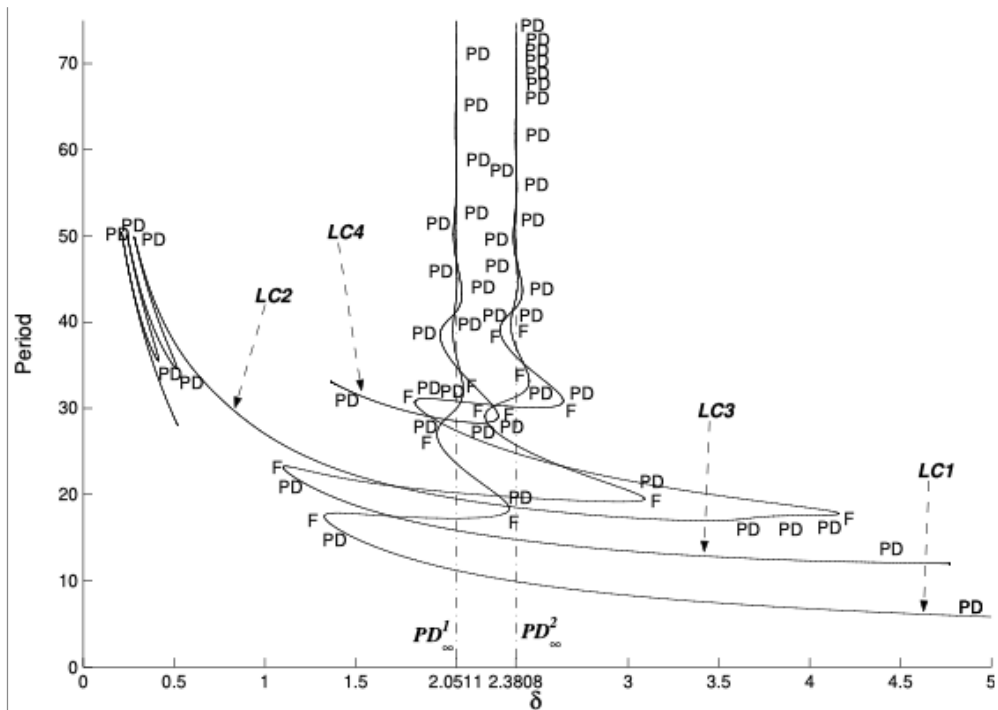


Gambar 10 (Kiri) Solusi yang hidup di dalam sebuah torus stabil (garis putus-putus) dan solusi periodik tak stabil (garis tegas). (Kanan) Dinamika di sekitar orbit yang mirip dengan orbit homoklinik. Ketika torus pada gambar kiri hilang, solusi periodik yang tidak stabil turut andil dalam menciptakan dinamika yang mirip dengan dinamika homoklinik. Direproduksi dari [Twk2003B].

Pandang kembali pada Sistem (5.1), namun dengan meninjau kasus di mana nilai eigen dari A adalah $\varepsilon\kappa_1 \pm 2i$ dan $-\varepsilon\kappa_2 \pm (1 + \varepsilon\omega)i$. Ini berarti kita mengasumsikan getaran-getaran linearnya memiliki frekuensi 2:1. Parameter ω dikenal dengan nama *detuning*. Sangatlah menarik bahwa setelah menerapkan metode perataan, sistem kembali dapat direduksi menjadi berdimensi tiga dan memiliki bentuk yang serupa dengan (5.3), tetapi dengan $\alpha = 0$. Hasil-hasil lengkap penelitian ini dapat dilihat di [Adi2008].

Salah satu hal menarik dalam penelitian ini adalah didapatkannya bifurkasi solusi periodik yang dinamakan bifurkasi *Period-Doubling*. Bayangkan jika kita memiliki sebuah solusi periodik. Kita dapat membuat irisan Poincaré di sekitar solusi periodik tersebut. Maka realisasi solusi periodik tersebut pada irisan Poincaré tersebut adalah sebuah titik.

Kita dapat mendefinisikan Pemetaan Poincaré dengan cara mengambil sebuah titik pada irisan Poincaré dekat dengan titik yang berkorespondensi dengan solusi periodik tadi. Titik tersebut dijadikan syarat awal kemudian kita ikuti aliran dari sistem hingga kembali ke irisan Poincaré. Dengan cara seperti ini, kita membangun sebuah Pemetaan yang merupakan Sistem Dinamik Diskrit, dan solusi periodik tersebut menjadi titik tetap dari Sistem Dinamik Diskrit.



Gambar 11 Barisan bifurkasi *Period-Doubling*. Direproduksi dari [Adi2008].

Maka kita dapat melakukan linearisasi di sekitar titik tetap tersebut dan menentukan nilai eigennya. Jika nilai eigennya melewati -1, maka terciptalah sebuah solusi periodik yang memiliki periode 2. Pada sistem semua, solusi periodik ini merupakan solusi periodik yang memiliki periode 2 kali periode solusi periodik asalnya. Inilah dikenal dengan nama bifurkasi *Period-Doubling*.

Bifurkasi ini sering kali terjadi berulang kali sehingga terbentuk tak berhingga banyaknya solusi periodik. Semua solusi periodik ini tidak stabil sehingga dinamika sistem di daerah itu menjadi *chaotic*.

Pada Gambar 11 diperlihatkan barisan bifurkasi *period doubling* yang dialami oleh solusi periodik dari Sistem (5.3). Setiap titik di bidang (δ, T) berkorespondensi dengan sebuah solusi periodik- T pada nilai δ tertentu. Jika kita mengikuti pergerakan pada kurva yang diberi label $LC1$ ke arah δ yang mengecil, maka di $4,5 < \delta < 5$ terdapat sebuah titik yang diberi label PD (misalkan dinamakan: (δ_0, T_0)). Maka di titik $(\delta_0, 2T_0)$ dimulai sebuah kurva baru yang diberi label $LC3$. Kurva baru ini adalah cabang baru dari solusi periodik dari Sistem (5.3) yang periodenya $2T_0$. Setiap titik yang diberi label PD pada dasarnya adalah titik di mana cabang baru solusi periodik terbentuk, atau cabang yang sudah ada lenyap.

Kembali pada kurva $LC1$, dari Gambar 11 dapat disimpulkan bahwa solusi periodik tersebut bergerak menuju ke tak hingga ketika δ mendekati suatu nilai, yaitu PD_∞^1 . Ada beberapa cabang periodik solution lain yang juga konvergen ke titik tersebut. Maka disimpulkan di sekitar titik PD_∞^1 terbentuk sebuah solusi homoklinik.

Mencari solusi homoklinik dari sistem (5.3). Sistem (5.3) seperti ditunjukkan pada [Twk2003A, Twk2006] memiliki dinamika yang sangat kaya. Dari sudut pandang teori bifurkasi ada banyak bifurkasi yang ditemukan secara numerik. Selain itu, struktur sistem (5.3) yang unik, sebagai berikut. Saat $\varepsilon = 0$, dinamika sistem (5.3) dapat dibatasi pada permukaan bola: $r^2 + x^2 + y^2 = R^2$. Untuk suatu R tertentu ditemukan bifurkasi fold. Dibuktikan pada [Twk2003A] bahwa bifurkasi ini berubah menjadi bifurkasi Hopf yang menghasilkan sebuah solusi periodik, ketika $\varepsilon \neq 0$.

Dalam kaitannya dengan paper [Crom2002], bagaimana caranya memodifikasi Sistem (5.3) agar solusi homoklinik bisa terbentuk. Misalkan ξ_0 adalah ekuilibrium yang bertipe *saddle*. Solusi $\varphi(t)$ dikatakan homoklinik jika memenuhi: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi(t) = \xi_0$. Sistem (5.3) tidak dapat memiliki solusi yang homoklinik karena adanya manifold invarian $r = 0$. Manifold invarian ini adalah dampak dari kenyataan adanya simetri: $r \mapsto -r$. Dengan memodifikasi sistem menjadi:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \\ x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \kappa_1 r + \gamma \\ -\kappa_2 x \\ -\kappa_2 y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta x r \\ \Omega(x, y)y - \delta r^2 \\ -\Omega(x, y)x \end{pmatrix}$$

solusi homoklinik tersebut ditemukan. Lebih jauh lagi, solusi homoklinik tersebut muncul untuk setiap $0 < \gamma \ll 1$. Dengan demikian disimpulkan bahwa dinamika homoklinik pada Sistem (5.3) adalah dampak dari adanya solusi homoklinik di setiap $0 < \gamma \ll 1$. Lihat [Twwk2013]

Selain [Twwk2003A, TWK2006, Adi2008, Twwk2013] masih ada pengembangan-pengembangan lain dari penelitian di bidang ini yang tidak dibahas di dalam bagian ini. Salah satu pengembangan yang penting adalah menambahkan satu buah getaran lain sehingga dimensi masalah bertambah. Hal ini masih sangat relevan dengan [Crom2002] yang bekerja dengan model getaran dengan lima derajat kebebasan. Penambahan gaya luar juga belum menjadi perhatian.

6. KETAKLINEARAN LAINNYA

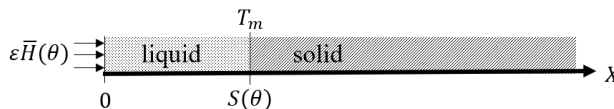
“There are more things in Heaven and Earth, Horatio,
than are dreamt of in your philosophy.”
—William Shakespeare, Hamlet

Pada bagian ini akan dideskripsikan secara singkat sumber-sumber ketaklinearan dalam persamaan diferensial dan juga dalam persamaan beda. Secara khusus, ingin diperlihatkan melalui contoh-contoh ini bahwa ketaklinearan dapat "bersembunyi" di balik kelinearan.

6.1 Ketaklinearan pada Syarat Batas

Ketaklinearan lain juga muncul dalam [Ihsan2022, Ihsan2024A, Ihsan 2024B]. Model yang ditinjau dalam ketiga makalah tersebut adalah Persamaan Diferensial Parsial Linear, yaitu: persamaan panas pada [Ihsan2022, Ihsan2024A] atau persamaan gelombang pada [Ihsan2024B].

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang melibatkan turunan parsial: turunan terhadap waktu dan turunan terhadap variabel ruang. Jadi, solusi dari persamaan diferensial parsial merupakan fungsi dalam variabel ruang dan variabel waktu. Untuk mendapatkan solusinya, dibutuhkan bukan hanya syarat awal (seperti persamaan diferensial biasa yang kita lihat di bagian-bagian sebelumnya dari tulisan ini), tetapi juga kondisi pada batas (yang disebut syarat batas).



Gambar 12 Masalah Stefan: perluruhan es ketika salah satu ujungnya diberikan fluks panas. Batas antara fase cair dan fase padat senantiasa bergerak ke kanan sehingga persamaan perambatan panas pada cairan merupakan persamaan diferensial parsial dengan syarat batas bergerak.

Pada [Ihsan, 2022] masalah yang ditinjau adalah masalah klasik yang dikenal dengan nama *Stefan problem*. Persamaan ini memodelkan masalah pencairan es (berdimensi satu) akibat adanya sumber panas pada salah satu ujung es tersebut. Akibatnya adanya panas tersebut, bagian es yang telah cair bertambah seiring dengan berjalannya waktu. Jadi domain dari variabel ruang

pada model ini juga fungsi dalam waktu yang bergantung pada solusinya. Ketika diterapkan sebuah transformasi yang membuat domain ini menjadi tetap, maka ketaklinearan pada batas menjadi ketaklinearan pada persamaan.

Sebagai contoh, pandang persamaan:

$$\begin{aligned} \partial_\tau U(X, \tau) &= \partial_{XX} U(X, \tau), 0 < X < S(\tau), \tau > 0 \\ -\partial_X U(S(\tau), \tau) &= S'(\tau), \tau \geq 0 \\ U(S(\tau), \tau) &= 0, \tau \geq 0 \\ \partial_X U(0, \tau) &= -\varepsilon H(\tau), \tau \geq 0 \\ U(X, 0) &= \varepsilon F(X), 0 < X < S(0) = b \end{aligned}$$

Dengan menggunakan transformasi:

$$\begin{aligned} t(\tau) &= \int_0^\tau S^{-2}(r) dr, x = \frac{X}{s(t)}, v(x, t) = U(X, \tau), \\ s(t) &= S(\tau), h(t) = H(\tau), f(x) = F(X) \end{aligned}$$

persamaan di atas ditransformasikan menjadi:

$$-\partial_x v(x, t) \frac{x}{s(t)} s'(t) + \partial_t v(x, t) = \partial_{xx} v(x, t), 0 < x < 1, t > 0.$$

Tentu saja kondisi-kondisi pada batas masih harus digarap. Namun dari persamaan ini sudah terlihat bahwa domain untuk menjadi tetap, yaitu interval $[0,1]$. Muncul suku ketaklinearan pada masalah utamanya, yang akan diskalakan ulang agar memiliki order yang lebih kecil daripada persamaan utamanya.

Selain menggunakan transformasi-transformasi di atas, dilakukan juga penskalaan $v(x, t) = \varepsilon u(x, t_0, t_1)$ dengan $t_0 = t$ dan $t_1 = \varepsilon t$. Metode ini dinamakan Skala Waktu Ganda. Lebih lanjut, dituliskan:

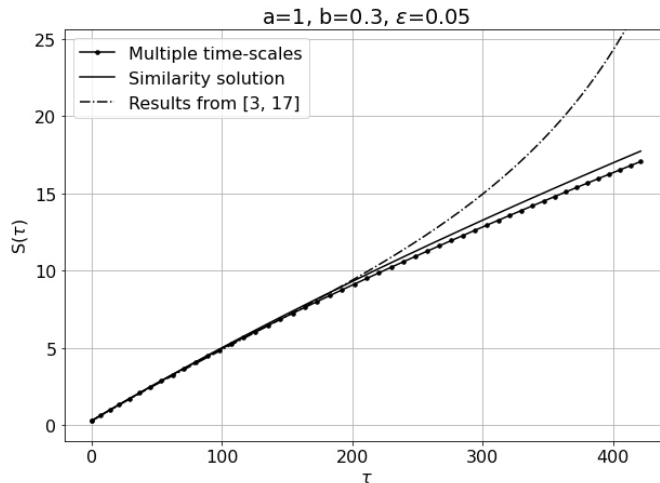
$$u(x, t_0, t_1) = u_0(x, t_0, t_1) + \varepsilon u_1(x, t_0, t_1) + \varepsilon^2 u_2(x, t_0, t_1) + O(\varepsilon^3).$$

Substitusi deret ini ke dalam persamaan dan juga syarat batas dan syarat awal, kemudian dikumpulkan suku-suku dengan pangkat ε yang sama. Untuk ε^k , persamaan yang harus diselesaikan berbentuk:

$$\partial_{t_0} u_k(x, t_0, t_1) - \partial_{xx} u_k(x, t_0, t_1) = \mathcal{F}_k(u_m)$$

dengan $m < k$, dan $\mathcal{F}_0 = 0$.

Pendekatan yang digunakan pada [Ihsan2022, Ihsan 2024A] ditemukan lebih superior dibandingkan dengan hasil penelitian sebelumnya pada [Cald2003] dan [Par2019]. Salah satu keunggulannya adalah dari skala waktu validitas dari aproksimasi yang dilakukan lebih panjang. Ini dapat dilihat bahwa solusi [Ihsan2022] bertahan lebih dekat dengan *solusi eksak* (diperoleh dengan metode similaritas) lebih lama. Lihat Gambar 13.



Gambar 13 Solusi [Ihsan202] bertahan lebih lama untuk tetap dekat dengan solusi similaritas. Hasil [3,17] adalah hasil dari [Cald2003] dan [Par2019]. Direproduksi dari [Ihsan2022]

Pada [Ihsan2024A] masalah yang sama dengan [Ihsan2022] ditinjau, namun dengan syarat batas yang berbeda. Jika pada [Ihsan2022] pada batas diberikan fluks panas, maka pada [Ihsan2024A] syarat yang diberikan adalah bahwa suhu pada salah satu ujung es senantiasa tetap. Syarat batas ini dikenal dengan nama syarat batas Dirichlet.

Pada [Ihsan2024B] ditinjau masalah getaran pada senar sitar, seperti pada Gambar 15. Masalah ini dapat dimodelkan sebagai persamaan gelombang dengan syarat batas bergerak (sebab titik sentuh S juga ikut bergetar bersama dengan getaran senar. Secara umum, dalam [Ihsan2022, Ihsan2024A, Ihsan2024B] ditinjau Persamaan Diferensial Parsial Linear yang karena syarat batasnya berubah menjadi masalah taklinear.



Gambar 14 Getaran senar pada alat musik sitar

6.2 Chaos dan Keteraturan

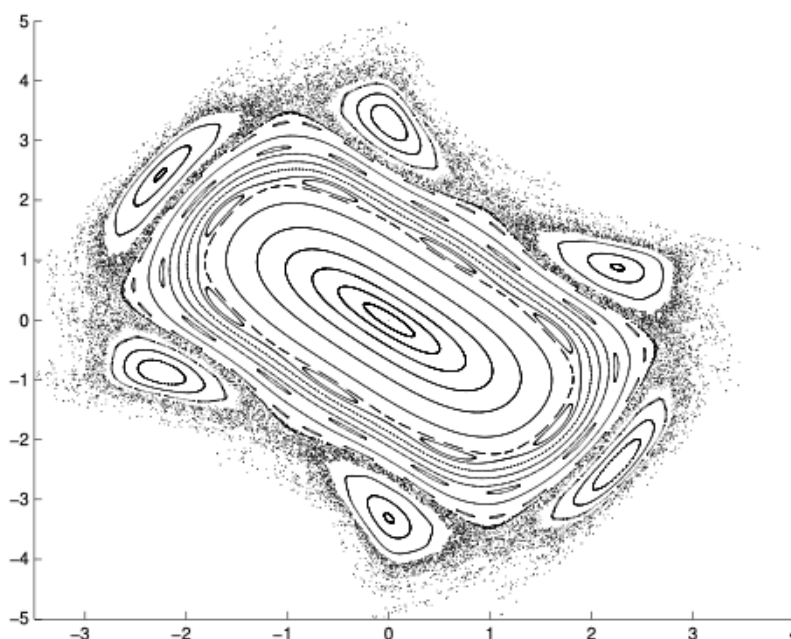
Salah satu hal yang menarik untuk dicermati adalah adanya harmoni antara *Chaos* dan Keteraturan. Pada [Twk2019B] ditinjau model:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = R_0 f(x) \sum_1^\infty \delta_0(t - nT), \quad (6.1)$$

dengan δ_0 adalah fungsi Delta Dirac. Pada dasarnya ini adalah sebuah persamaan getaran linear harmonik yang secara periodik ditendang sehingga terdapat ketidakkontinuan pada momentum. Besar tendangannya bergantung dari posisi pada saat itu. Dapat diturunkan pemetaan di \mathbb{R}^2 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = A(\omega_0 T) \begin{pmatrix} x_k \\ y_k + \frac{R_0}{\omega_0} f(x_k) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

dengan A adalah matriks rotasi. Untuk $f(x) = \sin(x)$, diperoleh gambar sebagai berikut.



Gambar 15 Dinamika Pemetaan (6.2) yang memiliki kompleksitas yang tinggi.

Pada Gambar 10 digambarkan potret fase dari sistem (6.2) untuk berbagai kondisi awal. Untuk sistem (6.1) kita dapat mengkonstruksi potret fasenya

dengan mengalikan (*Cartesian product*) Gambar 10 dengan S^1 . Jadi, Gambar 10 merupakan Irisan Poincaré dari Sistem (6.1).

Kurva tertutup di sekitar titik (0,0) berkorespondensi dengan torus yang invarian terhadap aliran dari sistem (6.1). Kurva tertutup kecil di antara dua kurva tertutup besar memperlihatkan sebuah torus yang berbelit. Titik-titik yang seperti kabut awan menunjukkan dinamika Chaotik yang ada berdampingan dengan perilaku regular.

Pada model getaran harmonik yang ditendang (*kicked harmonic oscillator*) ditinjau persamaan diferensial yang linear bagian demi bagian. Ketidaklinearan dalam model diperkenalkan oleh tendangan periodik yang besarnya bergantung terhadap posisi di mana tendangan tersebut terjadi.

7. APA YANG TELAH DIPELAJARI

Ketaklinearan senantiasa memperlihatkan sebuah dinamika yang aktif.

Dalam masalah sistem getaran berpasangan, interaksi terjadi antara getaran-getaran linearnya. Dalam kasus tertentu interaksi ini sangat dramatis, dalam kasus lain tidak demikian.

Dalam tulisan ini, ada dua penentu apakah dinamika sistem dramatis atau tidak. Yang pertama adalah resonansi. Pada dasarnya tipe resonansi menentukan seberapa tinggi pangkat monomial di mana suku resonansi ini muncul. Semakin tinggi pangkat ini, semakin tidak dramatis interaksi energi antargetaran linear. Hal kedua adalah adanya simetri dalam sistem. Simetri diskrit dapat menyebabkan resonansi orde satu: 2:1 muncul dalam sistem sebagai resonansi 4:2.

Dalam hal salah satu getaran linearnya tidak diinginkan, maka kita perlu menambahkan peredam agar getaran linear tersebut ditekan. Cara lain adalah dengan memasang getaran yang tidak diinginkan tersebut dengan sebuah getaran lain secara taklinear. Dengan ketaklinearan yang tepat, energi dari getaran yang tak diinginkan dapat dipindahkahkan; bahkan mungkin untuk dimanfaatkan dengan mengubahnya menjadi energi yang berbentuk lain.

Contoh klasik dari permasalahan ini adalah getaran dari sebuah kapal laut. Ketika kapal itu diterpa gelombang, pada dasarnya kapal tersebut hanya bergerak naik turun. Namun karena geometri dari kapal tersebut, gerakan ke kiri dan kanan juga terbentuk. Gerakan periodik (atau getaran) arah kiri dan kanan inilah yang tidak diinginkan, karena membuat penumpang mabuk laut. Jika kita mengerti bagaimana memindahkan energi dari getaran kiri ke kanan ke osilator lain, maka getaran tersebut dapat diredam.

Ketaklinearan juga berbicara tentang resolusi yang tak berhingga untuk menangkap fenomena di dalamnya.

Menjembatani proses hingga dan proses tak hingga senantiasa menimbulkan masalah. Secara umum, tidak ada kehinggaan yang cukup besar untuk bisa menangkap semua fenomena dalam ketakhinggaan. Berita negatif ini dapat diperlunak dengan menyadari bahwa ada teknik-teknik aproksimasi yang dapat digunakan untuk menghampiri ketaklinearan dengan sesuatu yang kita kenal.

Pada Bab 5 disebutkan bahwa model asalnya, yaitu persamaan Navier-Stokes dapat direduksi menjadi persamaan diferensial biasa di ruang berdimensi hingga, dengan menggunakan *Empirical Orthogonal Functions* (EOF). Ini merupakan salah satu contoh aproksimasi hingga dari ketaklingaan. Tentu saja, berhingga setelah dipotong. Keuntungan dari teknik menggunakan EOF ini adalah dampak atau kontribusi dari suku-suku yang dibuang itu cukup kecil.

Pendekatan EOF ini sangat berbeda dengan Metode Galerkin. Pada Metode Galerkin, solusi diuraikan sebagai deret dari fungsi-fungsi basis. Secara umum, tidak ada kaitan antara nomor fungsi basis dengan ukuran kontribusi kepada solusi totalnya. Dengan demikian, pemotongan Galerkin jika dilakukan tidak dapat memberikan estimasi sebarang baik hampiran ini. Pendekatan EOF yang dalam dunia matematika dikenal dengan nama Dekomposisi Nilai Singular, secara natural lebih baik. Ini disebabkan karena ketika solusi diuraikan ke dalam EOF, maka informasinya sebagian besar dicakup oleh beberapa suku awal hampiran.

Linear versus Taklinear. Tidak dapat dibantah bahwa Sistem Taklinear sangat sulit untuk dianalisis. Dalam banyak sekali kasus, Sistem Taklinear tidak dapat dihitung solusi eksaknya secara tepat. Jadi, bagaimana caranya kita dapat mengerti Sistem Taklinear?

Dengan memanfaatkan adanya parameter kecil dalam sistem, kita dapat mereformulasi masalah menjadi masalah perturbasi. Misalkan sistem persamaan terbentuk: $\dot{x} = f(x, t, \varepsilon)$. Kadang-kadang kita cukup beruntung untuk bisa menyelesaikan persamaan $\dot{x}_0 = f(x_0, t, 0)$. Maka dengan menuliskan $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$ lalu menyubstitusikannya ke dalam persamaan awal, maka biasanya x_1 dapat ditentukan. Dalam beberapa kasus, kita mendapatkan x_1 bisa tak terbatas. Jika ini terjadi, maka kita tidak lagi memiliki validitas untuk menuliskan $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$.

Dalam hal solusi x_1 terbatas, kita telah mendapatkan solusi yang cukup baik: kesalahannya adalah $O(\varepsilon^2)$ untuk skala waktu $O(1)$. Skala waktu kevalidan solusi aproksimasi ini dapat diperpanjang dengan menerapkan metode Perataan atau Skala Waktu Ganda.

Menurut pandangan saya, menuliskan masalah yang kita hadapi ke dalam bentuk masalah perturbasi: $\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t)$, jauh lebih bermanfaat ketimbang menghitung solusi eksaknya. Salah satu alasannya adalah jika permasalahan yang kita hadapi berupa persamaan diferensial yang melibatkan parameter, untuk mengetahui nilai parameter yang relevan dengan alam semesta kita, kita perlu melakukan pengukuran. Setiap kali kita melakukan pengukuran, maka kita melakukan kesalahan. Jadi, kecuali solusi eksak kita memiliki kestabilan struktural (tetap bertahan meskipun diganggu sedikit), maka tidak banyak gunanya kita mendapatkan solusi eksak tersebut. Mengapa demikian? Karena jika solusi tersebut hanya mungkin untuk suatu nilai parameter tertentu, maka dapat dipastikan kita tidak akan dapat menemukan perilaku tersebut di alam semesta kita.

Ketidaklinearan dalam Dunia Akademik di Indonesia

*Insanity is doing the same thing over and over again and
expecting different results*
—bukan Albert Einstein

Linearitas dalam pendidikan adalah kesesuaian antara bidang ilmu yang dipelajari seseorang dengan tugas atau mata pelajaran yang diampunya, baik bagi guru maupun dosen. Tujuannya adalah untuk meningkatkan kompetensi profesional, kualitas pembelajaran, dan memastikan bahwa seseorang memiliki kualifikasi yang sesuai untuk mengajar materi tertentu. Tentu saja tidak ada yang salah dengan hal ini. Bahkan memastikan bahwa yang mengajar memiliki kualifikasi yang sesuai bukan hanya baik, tetapi sangat penting untuk dipastikan.

Di lain pihak, penelitian bagi para pendidik di tingkat universitas juga merupakan keharusan. Penelitian akan menempatkan kita sebagai dosen untuk berada di lapis terdepan dalam bidang keilmuan kita, yang pada akhirnya akan membuat kualitas pengajaran kita juga membaik. Namun, dalam penelitian diperlukan sebuah kreativitas, agar mampu memandang sesuatu dengan cara yang berbeda. Dalam hal ini, terus menerus berada di bidang yang sama membuat kita masuk ke dalam rutinitas yang membunuh kreativitas.

Diperlukan sedikit ketidaklinearan barang kali? Keberanian untuk memasuki bidang yang baru, mengembangkan kompetensi di bidang yang baru, akan membuat seseorang keluar dari zona nyamannya. Jika kita menginginkan sesuatu yang besar, kita perlu mengizinkan ketidaklinearan untuk mengambil alih. Harapan saya, tulisan ini dapat memperlihatkan bahwa **ketaklinearan mampu membuat perubahan kecil pada input bereskalasi menjadi perubahan yang besar pada output**. Seperti yang dikatakan Quincy Jones (lihat hal 5 buku ini): "*There's a saying that trauma is frozen at the peak, and if you stay trapped at the top, you'll die*".

Selain itu, dalam penelitian lintas disiplin, ketidaklinearan dengan bidang ilmu para penelitiannya merupakan suatu kewajaran. Contohnya adalah apa yang dibahas pada Bagian 5 dari tulisan ini. Topik permasalahan yang ditinjau bersumber dari penelitian di bidang dinamika atmosfer, yang saat itu sedang menjadi topik penelitian di *Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut (Royal the Netherlands Institute for Meteorology)*. Contoh lain juga adalah kegiatan lalu di komunitas Matematika yang dikenal dengan nama *Industrial Mathematical Week* di mana pihak-pihak nonuniversitas datang membawa masalah real mereka dan para matematikawan berupaya *menyelesaikan* masalah tersebut. Masalah terbesar dalam minggu itu adalah bagaimana memformulasikan masalah real tersebut ke dalam masalah matematis yang dapat kita kerjakan. Jika kita tidak terbiasa berhadapan dengan bidang-bidang yang taklinear dengan bidang kita, kita akan tidak nyaman melewati minggu itu.

Kualitas kehidupan akademik adalah suatu konsep yang abstrak. Ada banyak sekali aspek-aspek yang harus di-"seimbang"-kan, meskipun kata "seimbang" itu sendiri belum tentu sudah merupakan suatu pengertian yang baku. Jadi, kehidupan masarakat akademik merupakan dunia yang sangat taklinear, penuh dengan dinamika, disrupsi (bifurkasi(?)) dan juga *chaos*.

Perangkingan universitas, pada dasarnya adalah sebuah usaha untuk "melinearkan" ketidaklinearan tersebut. Lebih jauh lagi, bukan hanya melinearkannya tetapi bahkan memproyeksikannya ke sebuah garis lurus di mana organ-organ dalam kehidupan akademik tersebut dapat diurutkan. Apakah ini buruk? Tidak juga, selama kita menyadari bahwa ini semua hanyalah sebuah proyeksi dari sesuatu yang berdimensi tinggi, dan dengan dinamika yang tinggi. Apa yang harus kita sadari? Bahwa proyeksi berarti

"membuang informasi". Memang argumentasi sebaliknya adalah: telah banyak upaya dan penelitian yang dilakukan untuk menyusun alat ukur tersebut. Namun, pertanyaannya tetap, seberapa baiknya kita dapat mengaproksimasi sesuatu yang tidak linear dengan sebuah garis?

Rangking sebuah universitas, selayaknya digunakan sebagai sebuah potret untuk menunjukkan bagian mana dari proses kita yang masih kurang dan harus mendapatkan perhatian. Fokus kita seharusnya diarahkan pada perbaikan proses tersebut, dan bukan pada cara mencapai ukuran yang digunakan agar rangking kita menjadi lebih baik. Kita perlu melahirkan kebijakan-kebijakan yang baik, dengan mengingat bahwa setiap kebijakan akan menentukan perilaku apa yang diberi insentif untuk berkembang. Seperti norm di ruang abstrak di dunia Matematika, menentukan barisan mana yang konvergen di ruang tersebut.

Harapan penulis, karya ini dapat memperlihatkan betapa menariknya ketidaklinearan. Ketidaklinearan menawarkan sebuah peluang besar untuk berkembang dengan cepat dan tidak terduga, tetapi juga dapat menghasilkan kekacauan (*chaos*). Harapan penulis, tulisan ini dapat memperlihatkan bahwa keregularan dan *chaos* tidak terpisah jauh satu dari yang lain (lihat Gambar 13).

Untuk Tuhan, Bangsa, dan Almamater ...

8. UCAPAN TERIMA KASIH

Rasa syukur saya berlimpah karena bisa berbagi kehidupan dengan orang-orang hebat berikut ini. Baik di dalam dunia matematika maupun di luar dunia matematika.

- Prof. Dr. M Wono Setya-Budhi dan Prof. Hendra Gunawan, Ph.D. (Analisis dan Geometri, FMIPA, ITB), yang telah menjadi pembimbing dan sahabat bagi penulis. Diskusi-diskusi dengan kedua sahabat ini senantiasa *mind blowing*.
- Prof. Dr. Ir. Harijono A. Tjokronegoro, terima kasih sudah berbagi pemikirannya, kekuatirannya, kegalauannya kepada saya melalui diskusi-diskusi keilmuan dan kebangsaan.
- Prof. Dr. Supama, M.Si., Prof. Dr. Ch Rini Indrati, dan Prof. Dr. F. Adi-Kusumo (Universitas Gajah Mada), Prof. Dr. rer. nat Herry Pribawanto (Universitas Sanata Dharma), Prof. Dr. Abadi (Universitas Negeri Surabaya), Prof Dr. Hartono (Universitas Negeri Yogyakarta), (Universitas Gajah Mada) dan Prof. Dr. La Zakaria (Universitas Lampung).
- *Segenap anggota KK Analisis dan Geometri*: Prof. Dr. Iwan Pranoto, Dr. Oki Neswan, Dr. Yudi Soeharyadi, Dr. Janny Lindiarni, Dr. Jalina Widjaja, Dr. Eric, Dr. Denny Iwanal Hakim, Dr. Arnasli Yahya, Dr. Rizal Afgani, dan Ifronika M.Si.
- *Segenap anggota tim penelitian sistem dinamik taklinear*: Dr. Marwan (Universitas Mataram), Dr. Dr. Dadang A Hamzah (President University), Dr. Livia Owen (Unika Parayangan), Dr. Aditya Firman Ihsan (Universitas Telkom), Stephanus Ardiyanto, M.Si., M Mahfuzh Siddiq, M.Si., Dr. Rahmi Rusin (Universitas Indonesia).
- Prof. dr Ferdinand Verhulst (University of Utrecht, the Netherlands). *My academic father who trusted me to explore the wonderful world of Asymptotic Analysis. Thank you for being a friend.*
- Prof. dr. ir. W.T. van Horssen (Technical University in Delft, the Netherlands) and Prof. Dr. G.R.W. Quispel (La Trobe University).
- Prof. dr. Bob Rink (Free Univesity of Amsterdam, the Netherlands), dan Prof. dr. Michiel Hochstenbach (Technical University of Eindhoven, the Netherlands).

- Paulus Bambang Widjanarko Santoso (Komisaris Independen United Tractors), Ronny Lukito (Pendiri dan Direktur Utama PT Eigerindo Multi Produk Industri), Lim Tjin Tju, dan Kiki Goenarso, Mangesh Kangoo.
- Komunitas *City Light Community Church*.
- Terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Santi Goenarso, yang telah mendampingi penulis dalam susah dan senang. *I will not be here if it is not because of your support. And to my son, Joshua Theodore Tuwankotta. I am looking forward to many-many discussions with you on life, mathematics and theology.* Juga kepada keluarga besar Tuwankotta dan keluarga besar Goenarso.

DAFTAR PUSTAKA

- [Adi2008] Adi-Kusumo, F., Tuwankotta, J. M., Setya-Budhi, W. (2008). *Chaos and strange attractors in coupled oscillators with energy-preserving nonlinearity*. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, 41(25), 255101.
- [Arn2013] Arnold, V. I., Afrajmovich, V. S., Il'yashenko, Y. S., & Shil'nikov, L. P. (2013). **Dynamical systems V: bifurcation theory and catastrophe theory** (Vol. 5). Springer Science & Business Media.
- [Bal2008] Balagaddé, F. K., Song, H., Ozaki, J., Collins, C. H., Barnet, M., Arnold, F. H., ... & You, L. (2008). *A synthetic Escherichia coli predator-prey ecosystem*. **Molecular systems biology**, 4(1), 187.
- [Bog1961] Bogoliubov, N.N., Mintropolsky, Yu. A. (1961) **Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations**. Gordon and Breach, New York.
- [Briggs1925] Briggs, G. E., & Haldane, J. B. S. (1925). *A note on the kinetics of enzyme action*. **Biochemical journal**, 19(2), 338.
- [Burgh1976] Van der Burgh, A. H. P. (1976). *On the asymptotic approximations of the solutions of a system of two non-linearly coupled harmonic oscillators*. **Journal of Sound and Vibration**, 49(1), 93-103.
- [Cai2013] Cai, Z., Wang, Q., & Liu, G. (2014). **Modeling the natural capital investment on tourism industry using a predator-prey model**. In **Advances in Computer Science and its Applications: CSA 2013** (pp. 751-756). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- [Cald2003] Caldwell, J., & Kwan, Y. Y. (2003). *On the perturbation method for the Stefan problem with time-dependent boundary conditions*. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 46(8), 1497-1501.
- [Crom2002] Crommelin, D. T. (2002). *Homoclinic dynamics: a scenario for atmospheric ultralow-frequency variability*. **Journal of the Atmospheric Sciences**, 59(9), 1533-1549.

- [Good1967] Goodwin, R. M. (1967). A Growth Cycle: Socialism, Capitalism and Economic Growth, 1967, ED. CH Feinstein. In **Essays in economic dynamics** (pp. 165-170). London: Palgrave Macmillan UK.
- [Frank1758] Benjamin Franklin, **Poor Richards Almanack**, June 1758, The Complete Poor Richards Almanacks, facsimile ed., vol. 2, pp. 375, 377
- [Har2016] Harjanto, E., & Tuwankotta, J. M. (2016). *Bifurcation of periodic solution in a Predator–Prey type of systems with non-monotonic response function and periodic perturbation*. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 85, 188-196.
- [Her1640] Herbert, G., "Outlandish proverbs, selected by Mr. G.H." In the digital collection Early English Books Online. <https://name.umdl.umich.edu/A03057.0001.001>. University of Michigan Library Digital Collections. Accessed November 9, 2025.
- [Ihsan2022] Ihsan, A. F., van Horsen, W. T., Tuwankotta, J. M. (2022). *On a multiple timescales perturbation approach for a stefan problem with a time-dependent heat flux at the boundary*. **Nonlinear Dynamics**, 110(3), 2673-2683.
- [Ihsan2024A] Ihsan, A. F., van Horsen, W. T., Tuwankotta, J. M. (2024). *On a multiple time-scales perturbation analysis of a Stefan problem with a time-dependent Dirichlet boundary condition*. **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, 75, 103961.
- [Ihsan2024B] Ihsan, A. F., van Horsen, W. T., Tuwankotta, J. M. (2024). *On string vibrations influenced by a smooth obstacle at one of the endpoints*. **Journal of Sound and Vibration**, 576, 118311.
- [Olver1993] Olver, P. J. (1993). **Applications of Lie groups to differential equations** (Vol. 107). Springer Science & Business Media.
- [Owen2020] Owen, L., & Tuwankotta, J. M. (2020). *On slow–fast dynamics in a classical predator–prey system*. **Mathematics and Computers in Simulation**, 177, 306-315.
- [Owen2022] Owen, L., Tuwankotta, J. M. (2022). *Computation of fold and cusp bifurcation points in a system of ordinary differential equations using the Lagrange multiplier method*. **International Journal of Dynamics and Control**, 10(2), 363-376.

- [Par2019] Parhizi, M., & Jain, A. (2019). *Solution of the phase change Stefan problem with time-dependent heat flux using perturbation method*. **Journal of Heat Transfer**, 141(2), 024503.
- [Rink2005] Rink, B. W., Tuwankotta, J. M., & Meyer, K. R. (2005). *Stability in Hamiltonian systems*. In '**Geometric Mechanics and Symmetry; the Peyresq Lectures**'. Cambridge UP.
- [San1977] Sanders, J. (1977). *Are higher order resonances really interesting?*. **Celestial mechanics**, 16(4), 421-440.
- [San2007] Sanders, J.A., Verhulst, F., Murdock, J. (2007) **Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems**, second edition. Vol. 59. New York, Springer.
- [Twk2003A] Tuwankotta, J. M. (2003). *Widely separated frequencies in coupled oscillators with energy-preserving quadratic nonlinearity*. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, 182(1-2), 125-149.
- [Twk2003B] Tuwankotta, J. M., & Quispel, G. R. W. (2003). *Geometric numerical integration applied to the elastic pendulum at higher-order resonance*. **Journal of computational and applied mathematics**, 154(1), 229-242.
- [Twk2004] Tuwankotta, J. M. (2004). *Averaging method and normal form for coupled oscillators with widely-spaced frequencies and energy-preserving nonlinearity* **J. Indonesian Math. Soc**, 10(2), 125-135.
- [Twk2006] Tuwankotta, J. M. (2006). *Chaos in a coupled oscillators system with widely spaced frequencies and energy-preserving non-linearity*. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 41(2), 180-191.
- [Twk2013] Tuwankotta, J. M., Adi-Kusumo, F., Saputra, K. V. I. (2013). *A three-dimensional singularly perturbed conservative system with symmetry breaking*. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, 46(30), 305101.
- [Twk2019A] Tuwankotta, J. M., Harjanto, E. (2019). *Strange attractors in a predator-prey system with non-monotonic response function and periodic perturbation*. **Journal of Computational Dynamics**, 6(2), 469-483.
- [Twk2019B] Tuwankotta, J. M., Ihsan, A. F. (2019). *On the dynamics of a kicked harmonic oscillator*. **International Journal of Dynamics and Control**, 7(3), 857-865.

- [Broek1988] van den Broek, B.(1988) **Studies in Nonlinear Resonances, Applications of Averaging**. PhD Thesis University of Utrecht.
- [Ver2001] Verhulst, F., Tuwankotta, J. M. (2001). Symmetry and resonance in Hamiltonian systems. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, 61(4), 1369-1385.
- [Wig2003] Wiggins, S. (2003). **Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos**. New York, NY: Springer New York.
- [Yos1990] Yoshida, H. (1990). *Construction of higher order symplectic integrators*. **Physics letters A**, 150(5-7), 262-268.

CURRICULUM VITAE



Nama : Johan Matheus Tuwankotta
Tempat/tgl lahir : Bandung/1 Desember 1970
Kel. Keahlian : Analisis dan Geometri, FMIPA
Alamat Kantor : Jl Ganesha no 10, Bandung
Nama Istri : Santi Goenarso
Nama Anak : Joshua Theodore Tuwankotta

I. RIWAYAT PENDIDIKAN

1. S-1 Matematika, Institut Teknologi Bandung (1990-1995)
2. S-2 Matematika, Intitut Teknologi Bandung (1996-1998) bidang: Analisis dan Aljabar
3. S-3 Matematika, Utrecht University, the Netherlands (1999-2002) bidang: Teori dan Aplikasi Sistem Dinamik.

II. RIWAYAT KERJA DI ITB

Sejak tahun 1996

III. RIWAYAT KEPANGKATAN

1. III/a-Penata Muda, Februari 1997
2. III/c-Penata, Oktober 2005
3. III/d-Penata Tk. 1, April 2015
4. III/a-Pembina, April 2018
5. IV/b-Pembina Tk. 1, April 2024

IV. RIWAYAT JABATAN FUNGSIONAL

1. Asisten Ahli, 2000
2. Lektor Kepala, Maret 2005
3. Guru Besar, Desember 2024

V. PUBLIKASI (2019-2024)

1. S. Ardiyanto, J.M. Tuwankotta (2025). Normal Form of Periodic FPU chain of Four Particles with Alternating Masses. *accepted for publication with Journal of Mathematical and Fundamental Sciences, ITB.*
2. Wilson, G., Tuwankotta, J. M., & Harjanto, E. (2025). Dynamics of the Double-Well Duffing System. In ITM Web of Conferences (Vol. 75). EDP Sciences.
3. Rohman, M. N., Tuwankotta, J. M., & Harjanto, E. (2025). Dynamics of a Modified Sprott A System. In ITM Web of Conferences (Vol. 75, p. 02008). EDP Sciences.
4. Ihsan, A. F., & Tuwankotta, J. M. (2024, August). On perturbation method for 1-D wave Stefan problem. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 3029, No. 1, p. 040001). AIP Publishing LLC.
5. Ihsan, A. F., van Horssen, W. T., & Tuwankotta, J. M. (2024). On string vibrations influenced by a smooth obstacle at one of the endpoints. *Journal of Sound and Vibration*, 576, 118311.
6. Shiddiq, M. M., Tuwankotta, J. M., & Eric. (2024, August). On the resonance frequencies of nonlinear microbeam actuated by multifrequency electrostatic force. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 3029, No. 1, p. 040017). AIP Publishing LLC.
7. Ihsan, A. F., van Horssen, W. T., & Tuwankotta, J. M. (2024). On a multiple time-scales perturbation analysis of a Stefan problem with a time-dependent Dirichlet boundary condition. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 75, 103961.
8. Hasanah, D., Gunawan, H., & Tuwankotta, J. M. (2023, January). Functions in vanishing morrey spaces. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2588, No. 1, p. 050001). AIP Publishing LLC.
9. Ihsan, A. F., van Horssen, W. T., & Tuwankotta, J. M. (2022). On a multiple timescales perturbation approach for a stefan problem with a time-dependent heat flux at the boundary. *Nonlinear Dynamics*, 110(3), 2673-2683.
10. Owen, L., & Tuwankotta, J. M. (2022). Computation of fold and cusp bifurcation points in a system of ordinary differential equations using the Lagrange multiplier method. *International Journal of Dynamics and Control*, 10(2), 363-376.
11. Verhulst, F., & Tuwankotta, J. M. (2020). A parametrically excited nonlinear wave equation. In *Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems* (pp. 155-169). Cham: Springer International Publishing.

12. Owen, L., & Tuwankotta, J. M. (2020). On slow-fast dynamics in a classical predator-prey system. *Mathematics and Computers in Simulation*, 177, 306-315.
13. Zakaria, L., & Tuwankotta, J. M. (2020). Dynamics of A Re-Parametrization of A 2-Dimensional Mapping Derived from Double Discrete Sine-Gordon Mapping. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*, 5(2), 363.
14. Tuwankotta, J. M., & Harjanto, E. (2019). Strange attractors in a predator-prey system with non-monotonic response function and periodic perturbation. *Journal of Computational Dynamics*, 6(2), 469-483.
15. Tuwankotta, J. M., van der Kamp, P. H., Quispel, G. R. W., & Saputra, K. V. I. (2019). Generating a chain of maps which preserve the same integral as a given map. *Physica Scripta*, 94(12), 125207.
16. Tuwankotta, J. M., & Ihsan, A. F. (2019). On the dynamics of a kicked harmonic oscillator. *International Journal of Dynamics and Control*, 7(3), 857-865.
17. Marwan, M., & Tuwankotta, J. M. (2019, August). Infinitely many equilibria and some codimension one bifurcations in a subsystem of a two-preys one-predator dynamical system. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1245, No. 1, p. 012063). IOP Publishing.
18. Owen, L., & Tuwankotta, J. M. (2019, August). Computation of cusp bifurcation point in a two-prey one predator model using lagrange multiplier method. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1298, No. 1, p. 012008). IOP Publishing.



📍 Gedung STP ITB, Lantai 1,
Jl. Ganesa No. 15F Bandung 40132
☎ +62 22 20469057
🌐 www.itbpress.id
✉ office@itbpress.id
Anggota Ikapi No. 043/JBA/92
APPTI No. 005.062.1.10.2018

Forum Guru Besar Institut Teknologi Bandung

Jalan Dipati Ukur No. 4, Bandung 40132
E-mail: sekretariat-fgb@itb.ac.id
Telp. (022) 2512532

🌐 fgb.itb.ac.id 📘 FgbItb 🐦 FGB_ITB
📍 @fgbitb_1920 📺 Forum Guru Besar ITB

