



**FORUM GURU BESAR**  
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG



# **Orasi Ilmiah Guru Besar Institut Teknologi Bandung**



## **PEMODELAN MATEMATIKA** **Simplifikasi Dunia Nyata**

**Profesor Agus Yodi Gunawan**

**Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Bandung**

**Aula Barat ITB  
24 Agustus 2024**



Orasi Ilmiah Guru Besar  
Institut Teknologi Bandung

**PEMODELAN MATEMATIKA:**  
Simplifikasi Dunia Nyata



Orasi Ilmiah Guru Besar  
Institut Teknologi Bandung

# **PEMODELAN MATEMATIKA:** Simplifikasi Dunia Nyata

**Prof. Agus Yodi Gunawan**

24 Agustus 2024  
Aula Barat ITB



Hak cipta © pada penulis dan dilindungi Undang-Undang

Hak penerbitan pada ITB Press

Dilarang memperbanyak sebagian atau seluruh bagian dari buku ini tanpa izin tertulis dan resmi dari penerbit.

*Orasi Ilmiah Guru Besar Institut Teknologi Bandung:*  
***Pemodelan Matematika: Simplifikasi Dunia Nyata***

Penulis : Prof. Agus Yodi Gunawan

Reviewer : Prof. Sri Redjeki Pudjaprasetya

Editor Bahasa : Rina Lestari

Cetakan I : 2024

ISBN : 978-623-297-529-3

e-ISBN : 978-623-297-530-9 (PDF)

**ITB PRESS**

© Gedung STP ITB, Lantai 1,  
Jl. Ganesa No. 15F Bandung 40132

+62 22 20469057

www.itbpress.id

office@itbpress.id

Anggota Ikapi No. 043/JBA/92  
APPTI No. 005.062.1.10.2018

*“With me, everything turns into mathematics”*

René Descartes

*“Although for the teaching of mathematics examples and applications in some context are very useful, it should not be forgotten that the essence of mathematics is to show 'abstract structures' and those should also be taught”*

(Stellingen no 6 pada disertasi penulis)



# PRAKATA

Bismillah, segala puji bagi Allah Swt. yang telah memberikan banyak kenikmatan, dan berkat izin-Nya penulis dapat menyelesaikan naskah orasi ilmiah ini dengan judul *Pemodelan Matematika: Simplifikasi Dunia Nyata*.

Naskah orasi ilmiah ini berisi 20 tahun (2004-2024) perjalanan penulis yang tergabung di Kelompok Keahlian Matematika Industri dan Keuangan FMIPA ITB dalam melaksanakan berbagai penelitian dengan menggunakan model matematika. Naskah ini secara garis besar terbagi ke dalam tiga bagian. Bagian pertama akan memberikan gambaran kepada pembaca seputar pemodelan matematika. Bagian kedua akan diisi dengan pemaparan seputar Matematika Industri. Bagian ketiga akan diisi dengan beberapa hasil penelitian yang telah dilakukan penulis dkk dalam ruang lingkup Matematika Industri yang menggunakan konsep model matematika.

Dua hal yang diharapkan penulis dari naskah ini adalah, pertama, mempromosikan matematika sebagai disiplin ilmu yang mampu menjadi bagian dari pemecahan masalah; dan kedua, memperkenalkan matematika sebagai disiplin ilmu yang dapat berkolaborasi dengan disiplin ilmu lain.

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada pimpinan dan anggota Forum Guru Besar ITB yang telah memberikan kesempatan untuk menyampaikan orasi ilmiah pada Sidang Terbuka Forum Guru Besar ITB. Semoga orasi ilmiah ini bermafaat.

Bandung, 24 Agustus 2024

Prof. Dr. Agus Yodi Gunawan, S.Si.,M.Si.



# SINOPSIS

Kajian teoretis ilmiah tentang suatu fenomena akan bertumpu pada suatu model, yaitu sesuatu yang meniru/mengutip/menjiplak ciri-ciri relevan dari suatu fenomena yang sedang dipelajari atau diamati. ‘Ujian akhir’ suatu model ditentukan oleh seberapa baik kinerja model tersebut ketika diterapkan terhadap permasalahan yang dirancang untuk ditangani. Ketika suatu model digunakan, sangat memungkinkan mengakibatkan terjadinya prediksi yang salah. Oleh karenanya, model yang dihasilkan di awal sering dimodifikasi, atau dibuang, dan terkadang tetap digunakan karena lebih baik daripada tidak ada sama sekali.

Ketika matematika diterapkan pada suatu masalah kehidupan nyata, sebuah proses *translation* diperlukan. Model yang meniru sebuah fenomena nyata dengan menggunakan bahasa matematika disebut model matematika. Proses/aktivitas ‘penerjemahan’ dari suatu fenomena menjadi bentuk formula matematis yang mudah dikerjakan (*tractable*) dan kemudian menjadi keluaran (solusi) yang bermakna dan berguna dalam konteks permasalahan aslinya disebut pemodelan matematika.

*Most models simplify reality* (Giordano dkk., 2003). Salah satu tahap dalam pemodelan matematika adalah penyederhanaan (simplifikasi). Tahap ini dilakukan untuk menghasilkan suatu model yang mudah diselesaikan secara analitis, semi-analitis, dan/atau komputasi/simulasi, tetapi tetap membawa esensi dari masalah yang dikaji (*Keep It Short, Simple, but MEaningful*). Tahapan penyederhanaan dalam suatu model akan selalu diimbangi dengan tahap perbaikan model (*refinement* atau *revision*). Siklus ini akan senantiasa mengikuti sebuah model yang dikonstruksi.

Naskah ini secara garis besar terdiri atas tiga bagian. Bagian pertama akan diisi dengan pemaparan seputar pemodelan matematika secara umum dan kuliah Pemodelan Matematika di Prodi Sarjana Matematika ITB. Bagian kedua akan diisi dengan pengenalan bidang Matematika Industri. Bagian terakhir akan diisi dengan beberapa hasil penelitian penulis dkk. pada permasalahan Matematika Industri, baik dari bidang fluida, ilmu hayati, data/sistem informasi, maupun gempa bumi, disusun berdasarkan tahun penelitian.



# DAFTAR ISI

PRAKATA.....	VII
SINOPSIS .....	IX
DAFTAR ISI.....	XI
DAFTAR GAMBAR.....	XIII
DAFTAR TABEL.....	XIX
1 PENDAHULUAN.....	1
2 MODEL MATEMATIKA DAN PEMODELAN MATEMATIKA .....	3
2.1 Pemodelan Matematika Secara Umum .....	3
2.2 Kuliah Pemodelan Matematika di Prodi Sarjana Matematika ITB .....	6
3 MATEMATIKA INDUSTRI .....	11
4 RINGKASAN BEBERAPA PENELITIAN .....	15
4.1 Proses Pemutusan Benang Polimer .....	15
4.2 Pemodelan Invasi Filtrat Lumpur.....	22
4.3 Pemodelan Konversi Oksidasi Metana Dalam <i>Reverse Flow</i> <i>Reactor</i> (RFR) .....	27
4.4 Model Kinetika Sistem Fermentasi Etanol dengan Efek Tundaan .....	29
4.5 Model Matematika Pengaruh Surfaktan Tak Larut Terhadap Pergerakan Garis Kontak Bulir Minyak.....	34
4.6 Model Matematika Pengaruh Surfaktan Terhadap Pergerakan Bulir Cairan di Atas Permukaan Padat .....	42
4.7 Masalah Nilai Awal Fuzzy pada Model Osilator Harmonik .....	48
4.8 Model Tak Terstruktur Sistem Fermentasi Etanol Multiseluler .....	53
4.9 Klasterisasi Data Metabolomik.....	58
4.10 Aliran Fluida Bingham pada Sebuah Saluran Media Berpori .....	64
4.11 Pembentukan Pola Spasial pada Kondisi Wabah Model SI.....	69
4.12 Deteksi Pencilan Menggunakan Algoritma PCA Rekursif Termodifikasi untuk Data Aliran Dinamis.....	76
4.13 Analisis Aktivitas Seismik di Lima Sumber Gempa Bumi Pada Zona Megathrust Sumatra.....	82
5 PENUTUP.....	93
6 UCAPAN TERIMA KASIH .....	95

DAFTAR PUSTAKA.....	99
CURRICULUM VITAE.....	105

# DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2.1</b>	Fenomena (sistem) dan dua bentuk representasi model [diadaptasi dari (Giordano dkk., 2003) dengan penyesuaian]. ....	4
<b>Gambar 2.2</b>	Dua metode pendekatan [diadaptasi dari (Giordano dkk., 2003) dengan penyesuaian]. ....	5
<b>Gambar 2.3</b>	Siklus pemodelan matematika [diadaptasi dari (Giordano dkk., 2003) dengan penyesuaian].....	6
<b>Gambar 4.1</b>	Sketsa sebuah <i>extruder</i> [Sumber: Disertasi Doktor]. ....	16
<b>Gambar 4.2</b>	Ilustrasi proses pemutusan benang ( <i>thread</i> ) menjadi butiran polimer ( <i>drop</i> ) [Sumber: Disertasi Doktor]. ....	16
<b>Gambar 4.3</b>	Hasil percobaan yang dilaporkan Knops (1997) [Sumber: Disertasi Doktor]. ....	17
<b>Gambar 4.4</b>	Sistem kordinat pada masing-masing benang [Sumber: Disertasi Doktor].....	17
<b>Gambar 4.5</b>	Grafik $q_{\max}$ sebagai fungsi jarak $b$ . Simbol segitiga menyatakan proses <i>out-of-phase</i> , simbol segiempat meyatakan proses <i>in-phase</i> . (Kiri) $\mu = 0,04$ ; (Kanan) $\mu = 4$ [Sumber: Disertasi Doktor].....	20
<b>Gambar 4.6</b>	Grafik jarak kritis terhadap perbandingan viskositas (skala logaritmik) [Sumber: Disertasi Doktor]. ....	20
<b>Gambar 4.7</b>	Salah satu formasi proses terputusnya 3-benang [Sumber: Disertasi Doktor]. ....	21
<b>Gambar 4.8</b>	Grafik $q_{\max}$ sebagai fungsi jarak $b$ . Simbol segitiga menyatakan formasi <i>out-of-phase</i> , simbol segiempat meyatakan formasi <i>in-phase</i> , simbol silang meyatakan formasi campuran. (Kiri) $\mu = 0,04$ ; (Kanan) $\mu = 4$ [Sumber: Disertasi Doktor]. ....	21
<b>Gambar 4.9</b>	Ilustrasi zona invasi dalam sistem aliran linier [Sumber: artikel penulis].....	23
<b>Gambar 4.10</b>	Profil konsentrasi filtrat lumpur untuk permeabilitas <i>mud cake layer</i> : rendah (kiri), tinggi (kanan) [Sumber: artikel penulis].....	25

**Gambar 4.11** Perbandingan hasil kedalaman invasi filtrat lumpur: pengukuran, empiris (Yan dkk, 1997), model yang diusulkan [Sumber: artikel penulis]. ..... 26

**Gambar 4.12** Kurva laju reaksi terhadap suhu [Sumber: artikel penulis]...... 28

**Gambar 4.13** Grafik konversi  $\chi$  sebagai fungsi posisi  $x$ , untuk  $\varepsilon=0,05$  (kiri) dan  $\varepsilon=0,005$  (kanan); solusi asimtotik (garis padat), solusi eksak (garis putus-putus), dan solusi numerik (titik-titik) [Sumber: artikel penulis]...... 29

**Gambar 4.14** Representasi jalur metabolisme utama sel ragi *S. cerevisiae* [Sumber: artikel penulis]...... 30

**Gambar 4.15** Kurva bifurkasi dari tundaan kritis  $\tau$  terhadap parameter  $r$  (rasio laju suplai glukosa terhadap laju reaksi maksimum dari enzim *piruvat kinase*), untuk  $\lambda_1 = \pi/2$  [Sumber: artikel penulis]. ..... 33

**Gambar 4.16** Diagram rasio laju setimbang produk metabolisme sebagai fungsi dari laju suplai glukosa [Sumber: artikel penulis]...... 33

**Gambar 4.17** Ilustrasi hasil eksperimen Kralchevsky (2005) tentang pelepasan bulir minyak secara spontan dari sebuah permukaan padat di dalam larutan surfaktan [Sumber: artikel penulis]. ..... 35

**Gambar 4.18** Sketsa bulir minyak yang menempel di atas sebuah permukaan padat [Sumber: artikel penulis]...... 36

**Gambar 4.19** Bagan alur penyelesaian. .... 38

**Gambar 4.20** (a) Perbandingan perubahan bentuk bulir antara yang mengandung dan tidak mengandung surfaktan pada dinding yang berkoefisien friksi besar. (b) Distribusi konsentrasi surfaktan dan nilai tegangan permukaan [Sumber: artikel penulis]...... 39

**Gambar 4.21** (a) Perbandingan perubahan bentuk bulir antara yang mengandung dan tidak mengandung surfaktan pada dinding yang berkoefisien friksi kecil. (b) Distribusi konsentrasi surfaktan dan nilai tegangan permukaan [Sumber: artikel penulis]...... 40

<b>Gambar 4.22</b>	(a) Sketsa bulir di atas permukaan padat (b) Hubungan antara koefisien penyebaran $S_e$ dan nilai $x_e$ [Sumber: artikel penulis].....	43
<b>Gambar 4.23</b>	Perbandingan (a) dinamika $x(t)$ dan (b) bentuk bulir cairan, untuk bulir dengan dan tanpa surfaktan [Sumber: artikel penulis]. .....	47
<b>Gambar 4.24</b>	$\alpha$ -cut solusi fuzzy Persamaan (4.7.4) dengan $k_1=1$ dan $k_2=0.2$ . Gambar kiri: $y_{1\alpha}^-(t)$ ditandai dengan tanda bintang, $y_{1\alpha}^+(t)$ diberi tanda lingkaran, dan solusi $y_1(t)$ oleh garis padat. Gambar kanan: notasi yang sama kecuali indeks 1 digantikan dengan indeks 2. [Sumber: artikel penulis].....	50
<b>Gambar 4.25</b>	Informasi yang sama dengan Gambar 4.24 tetapi untuk $k_1=1$ dan $k_2=0$ [Sumber: artikel penulis].....	50
<b>Gambar 4.26</b>	Informasi yang sama dengan Gambar 4.24 tetapi untuk konsep GHD [Sumber: artikel penulis]. .....	51
<b>Gambar 4.27</b>	Informasi yang sama dengan Gambar 4.25 tetapi untuk konsep GHD [Sumber: artikel penulis]. .....	51
<b>Gambar 4.28</b>	Informasi yang sama dengan Gambar 4.24 tetapi untuk konsep FDI. Bagian kanan gambar menyajikan solusi di awal waktu [Sumber: artikel penulis]. .....	52
<b>Gambar 4.29</b>	Informasi yang sama dengan Gambar 4.25 tetapi untuk konsep FDI. Bagian kanan gambar menyajikan solusi di awal waktu [Sumber: artikel penulis]. .....	52
<b>Gambar 4.30</b>	Kurva bifurkasi dari solusi kesetimbangan sistem dengan laju pengenceran tak berdimensi yang tetap ( $\rho_a = 0; 21$ ) dan $X_s$ sebagai parameter bifurkasi [Sumber: artikel penulis ]......	56
<b>Gambar 4.31</b>	Kurva bifurkasi dari solusi kesetimbangan sistem ketika nilai <i>carrying capacity</i> sel dinaikkan dari $C_m = 23$ (merah) menjadi $C_m = 230$ (biru) dengan $X_s$ sebagai parameter bifurkasi [Sumber: artikel penulis ]. .....	57
<b>Gambar 4.32</b>	Struktur dataset metabolit kunci cengkeh [Sumber: artikel penulis].....	59
<b>Gambar 4.33</b>	Nilai indeks Tang Sun Sun sebelum reduksi dimensi [Sumber: artikel penulis]. .....	61

**Gambar 4.34** Sketsa fluida Bingham pada sebuah saluran media berpori [Sumber: artikel penulis]. ..... 66

**Gambar 4.35** Lebar  $\delta_e$  sebagai fungsi dari  $B_n$  untuk berbagai nilai  $\beta$  : 0,1 (garis padat), 1 (titik-titik), 5 (putus-putus kecil), 10 (putus-putus besar) [Sumber: artikel penulis]. ..... 67

**Gambar 4.36** Kecepatan keadaan tunak  $u_e(y)$  untuk  $\beta = 0,8$  dan  $B_n$ : 0,25 (garis padat), 0,5 (titik-putus-titik), dan 0,75 (putus-putus) [Sumber: artikel penulis]...... 67

**Gambar 4.37** Lebar  $\delta_e$  sebagai fungsi dari  $\beta$  untuk  $B_n = 0,2$ ; dari rumus eksak (garis padat), aproksimasi VRT (garis putus-putus), dan aproksimasi PRT (titik-titik) [Sumber: artikel penulis]. ..... 68

**Gambar 4.38** Lebar  $\delta(t)$  (garis padat),  $\delta_1(t)$  (titik-titik), dan  $\delta_e$  (garis putus-putus) [Sumber: artikel penulis]. ..... 68

**Gambar 4.39** Langkah kerja persamaan amplitudo. .... 72

**Gambar 4.40** Ruang Turing Model dengan parameter bifurkasi  $\xi_2$  [Sumber: artikel penulis]. ..... 72

**Gambar 4.41** Pola-pola distribusi kepadatan populasi individu terinfeksi pada iterasi 180.000 dengan  $d = 0.05$ ,  $\gamma = 2500$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\alpha = 0.545$ ,  $\xi_1 = 1$  dan beberapa variasi nilai  $\xi_2$ . (a)  $\xi_2 = 0.01$ , (b)  $\xi_2 = 3$ , (c)  $\xi_2 = 7$ , (d)  $\xi_2 = 8.5$ , (e)  $\xi_2 = 9.5$  [Sumber: artikel penulis]. ..... 73

**Gambar 4.42** Lokasi kemunculan lima tipe pola Turing dengan parameter  $d = 0.05$ ,  $\gamma = 2500$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\alpha = 0.545$ , dan berbagai nilai  $\xi_1$  dan  $\xi_2$ . Tanda  $\circ, \times, +, \star$ , dan  $\square$  masing-masing mewakili pola bintik-bintik, campuran bintik dan garis, garis-garis, campuran garis dan lubang-lubang, serta lubang-lubang [Sumber: artikel penulis]. ..... 75

**Gambar 4.43** Algoritma deteksi pencilan online [Sumber: artikel penulis]. ..... 79

**Gambar 4.44** Plot selisih skor Mahalanobis untuk: (a) 2 Fitur, (b) 3 Fitur, (c) 5 Fitur, dan (d) 10 Fitur [Sumber: artikel penulis]. ..... 80

**Gambar 4.45** Diagram berarah Model Markov Tersembunyi (diadaptasi dari Zucchini dkk., 2016). ..... 84

**Gambar 4.46** Diagram alur dari algoritma EM. Diagram tersebut diadaptasi dari <https://www.indowhiz.com/> diakses pada tanggal 24 Juni 2020..... 87

**Gambar 4.47** Alur dari proses persiapan data. .... 87

**Gambar 4.48** Sebaran pasangan data dari dua segmen berdekatan. Kolom merepresentasikan empat kasus dari dua segmen yang berdekatan. Sedangkan baris pada gambar secara berurutan merepresentasikan pasangan data dari: data penelitian, fungsi distribusi empirik data penelitian, dan fungsi distribusi empirik hasil kontinuitas data penelitian [Sumber: artikel penulis]. ..... 89

**Gambar 4.49** Estimasi keadaan aktivitas seismik dari segmen AA-NS (atas) dan klasifikasi gempa bumi didasarkan pada keadaan dan segmennya (bawah) [Sumber: artikel penulis]. ..... 91



# DAFTAR TABEL

<b>Tabel 2.1</b>	Topik Pemodelan Matematika 2004-2007.....	7
<b>Tabel 2.2</b>	Topik Pemodelan Matematika 2023/2024. ....	8
<b>Tabel 4.1</b>	Perubahan luas daerah bulir dan total konsentrasi surfaktan. ....	41
<b>Tabel 4.2</b>	Hasil klasterisasi tanpa reduksi dimensi [Sumber: artikel penulis]. ....	61
<b>Tabel 4.3</b>	Nilai indeks Tang Sun Sun setelah reduksi dimensi [Sumber: artikel penulis]. ....	62
<b>Tabel 4.4</b>	Hasil klasterisasi dengan PCA sebagai teknik reduksi dimensi [Sumber: artikel penulis]. ....	63
<b>Tabel 4.5</b>	Hasil klasterisasi dengan MWA sebagai teknik reduksi dimensi [Sumber: artikel penulis]. ....	63
<b>Tabel 4.6</b>	Deskripsi variabel dan parameter [Sumber: artikel penulis]. ....	71
<b>Tabel 4.7</b>	Keberadaan dan kestabilan solusi kesetimbangan persamaan amplitudo [Sumber: artikel penulis]. ....	74
<b>Tabel 4.8</b>	Perbandingan kinerja dari algoritma deteksi pencilan offline dan online [Sumber: artikel penulis]. ....	81
<b>Tabel 4.9</b>	Formula dan informasi dari keluarga Copula Archimedean dan Copula Elliptic [Sumber: artikel penulis]. ....	86
<b>Tabel 4.10</b>	Rekapitulasi parameter model peluang 3-keadaan Poisson-MMT untuk kelima segmen [Sumber: artikel penulis]. ....	88
<b>Tabel 4.11</b>	Nilai estimasi parameter dari model terpilih untuk keempat kasus [Sumber: artikel penulis]. ....	90



# 1 PENDAHULUAN

(Berry dan Houston, 1995) mengungkapkan bahwa secara tradisional disiplin ilmu yang mempelajari penggunaan matematika disebut Matematika Terapan (*Applied Mathematics*). Namun, sering kali dipahami oleh sebagian orang bahwa Matematika Terapan ini adalah matematika yang terkait dengan Mekanika. Padahal, matematika terjadi di banyak hal, misalnya di bidang ekonomi, biologi, linguistik, transportasi; serta di bidang industri, perdagangan, dan pemerintahan. Menerapkan matematika pada banyak hal, selain membutuhkan keterampilan matematis yang baik, diperlukan pula keterampilan untuk memulai masalahnya dalam bentuk masalah non-matematis, menyelesaikannya dan memberikan hasil analisis matematisnya dalam bentuk bahasa non-matematis. Keterampilan tersebut merupakan keterampilan dari *pemodelan matematika*.

Secara garis besar, proses pemodelan matematika terdiri atas tiga tahapan utama (Berry dan Houston, 1995). Tahap pertama, mengambil suatu permasalahan di dunia nyata sebagai bahan kajian, membangun asumsi, dan merumuskannya (*formulate*) sebagai sebuah masalah matematika (model matematika). Tahap kedua, masalah matematika tersebut kemudian dipecahkan (*solved*). Tahap ketiga, solusi diterjemahkan kembali ke konteks semula sehingga hasil dari model dapat sesuai ditafsirkan (*interpreted*) dan digunakan untuk membantu memecahkan masalah yang sebenarnya.

Penggunaan konsep dan metode matematika sebagai bantuan untuk memahami permasalahan dunia nyata yang timbul dari berbagai bidang ilmu kini menjadi pendekatan yang sudah mapan (*well-established*). Lebih jauh lagi, sebagai apresiasi terhadap efektivitas penerapan matematika (termasuk di dalamnya komputasi dan sejenisnya) untuk memecahkan masalah industri yang bersifat *non-textbook*, maka diperkenalkan bidang *matematika industri*. Kehadiran bidang ini diharapkan dapat lebih menumbuhkan kesadaran akan kekuatan matematika dalam menyediakan jalur solusi terhadap masalah-masalah dunia nyata.

Naskah ini secara garis besar terdiri atas tiga bagian. Bagian pertama akan diisi dengan pemaparan seputar pemodelan matematika secara umum dan kuliah Pemodelan Matematika di Prodi Sarjana Matematika ITB. Bagian kedua akan diisi seputar bidang Matematika Industri. Bagian terakhir akan diisi

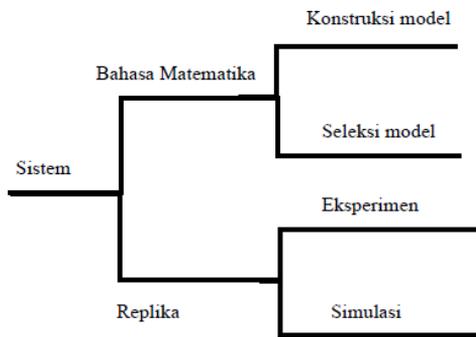
dengan beberapa hasil penelitian penulis dkk. pada permasalahan Matematika Industri, baik dari bidang fluida, ilmu hayati, data/sistem informasi, maupun gempa bumi yang disusun berdasarkan tahun penelitian.

## 2 MODEL MATEMATIKA DAN PEMODELAN MATEMATIKA

Pada bagian ini akan dipaparkan tentang model matematika dan pemodelan matematika. Pemaparan akan diawali dengan pengertian model matematika dan konsep-konsep yang digunakan pada pemodelan matematika. Selanjutnya akan dipaparkan mengenai kuliah pemodelan matematika di Prodi Sarjana Matematika ITB.

### 2.1 Pemodelan Matematika Secara Umum

Model merupakan sesuatu yang meniru/mengutip/menjiplak ciri-ciri relevan dari suatu fenomena yang sedang dipelajari atau diamati. Lebih jauh lagi, model merupakan idealisasi sederhana dari suatu realitas yang kompleks. Kita dapat menggunakan kata-kata untuk melukiskan sebuah model, atau dengan sketsa gambar, atau dengan program komputer, atau dengan bahasa matematika. Dari sekian banyak definisi, definisi berikut yang penulis anggap cukup mewakili: model matematika adalah konstruksi matematis yang abstrak dan disederhanakan yang berkaitan dengan suatu masalah nyata dan dimaksudkan untuk tujuan tertentu (*A mathematical model is an abstract, simplified, mathematical construct related to a part of reality and created for a particular purpose*) (Bender, 1978). Realitas (*reality/real word*) yang dimaksud di sini adalah domain di mana berbagai macam fenomena atau perilaku dapat diamati baik yang dilahirkan secara alamiah maupun diciptakan oleh manusia sebagai sebuah tiruan (replika) (Dym, 2004). Fenomena yang diterjemahkan tersebut biasa dinamakan *sistem* (Mattheij dan Molenaar, 2002). Gambar 2.1 memperlihatkan cara menyajikan suatu fenomena (sistem) ke dalam dua bentuk representasi: bahasa matematika dan replika. Dalam bahasa matematika, sistem yang diamati dapat dinyatakan oleh model yang sudah ada (seleksi model), atau jika belum ada dapat dilakukan dengan membangun model yang baru. Sistem juga memungkinkan untuk direpresentasikan oleh suatu replika/tiruan yang kemudian perwujudannya dapat dalam bentuk eksperimen (misal *scale-down model*) atau simulasi via komputer (misal *toy problem*).

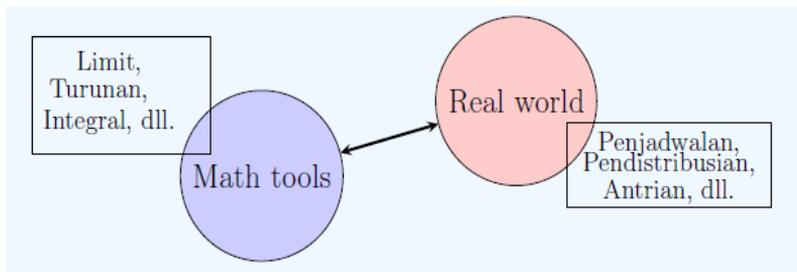


**Gambar 2.1** Fenomena (sistem) dan dua bentuk representasi model [diadaptasi dari (Giordano dkk., 2003) dengan penyesuaian].

Setiap model matematika selalu memuat simplifikasi (penyederhanaan). Model tidak boleh terlalu ‘kasar’, dalam arti hasil yang diterimanya tidak cukup akurat/mewakili fenomena yang dikaji; juga tidak boleh terlalu ‘halus’ sehingga model menjadi rumit dan tidak dapat diselesaikan. Model juga harus tetap membawa esensi permasalahan yang akan diselesaikan, *keep it short, simple, but meaningful* (*‘Kiss Me’*). Model yang dibangun paling tidak akan mendapatkan posisi sebagai salah satu dari tiga yang berikut (Dym, 2004):

- a. Model mampu *menggambarkan* fenomena/perilaku yang diamati;
- b. Model mampu *menjelaskan* mengapa fenomena/perilaku itu terjadi;
- c. Model mampu *memprediksi* perilaku yang belum terlihat ataupun terukur. Model seperti ini selanjutnya perlu diteruskan dengan observasi/eksperimen untuk memvalidasinya.

Pada Gambar 2.2 diberikan dua ilustrasi metode pendekatan. Pihak pada lingkaran biru, mereka memiliki banyak alat matematika, seperti limit, turunan, integral, dan sejenisnya, yang kemudian mereka mencari penerapan alat tersebut di dunia nyata. Sementara pihak pada lingkaran merah, mereka memiliki masalah-masalah nyata yang perlu diselesaikan, misalnya masalah penjadwalan, pendistribusian, antrian dan yang sejenisnya, yang kemudian mereka mencari alat-alat matematika yang bersesuaian untuk menjawab masalahnya.

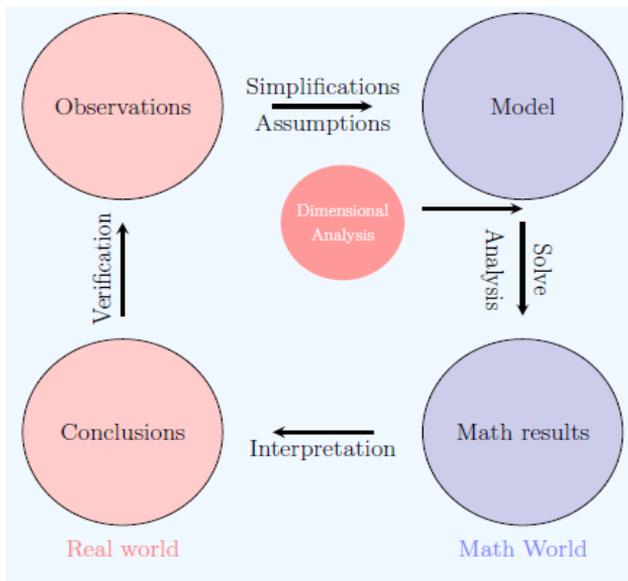


**Gambar 2.2** Dua metode pendekatan [diadaptasi dari (Giordano dkk., 2003) dengan penyesuaian].

Di daerah lingkaran biru biasanya memuat masalah matematika yang jelas, sedangkan di daerah lingkaran merah memuat masalah nyata yang jelas. Suatu proses diperlukan untuk menyatakan fenomena yang berada di lingkaran merah menjadi bentuk formula matematika di lingkaran biru. Proses/aktivitas yang menerjemahkan sebuah fenomena/peristiwa kedalam bentuk dan bahasa matematika yang dapat dikerjakan (*tractable*) dan kemudian dapat memberikan jawaban yang bermanfaat dalam konteks permasalahan aslinya dinamakan *pemodelan matematika*.

Pada Gambar 2.3 disajikan siklus pemodelan matematika. Secara ringkas, siklus tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut.

- a. Melakukan observasi, mengidentifikasi faktor utama yang terlibat dalam masalah dunia nyata yang dikaji, membuat asumsi yang bersesuaian dan melakukan simplifikasi (penyederhanaan).
- b. Menduga suatu hubungan sementara di antara faktor-faktor yang terlibat (menggunakan hukum atau kaidah saintifik yang ada, misal Hukum Newton dan lain sebagainya).
- c. Menerapkan analisis matematis pada model yang dihasilkan. Salah satu aspek yang biasa diterapkan adalah mereduksi model dengan menggunakan analisis dimensi.
- d. Menafsirkan kesimpulan matematis dalam kaitannya dengan masalah dunia nyata.
- e. Memverifikasi model yang sudah dibangun dengan perilaku yang dikaji (jika tersedia data), dilanjutkan dengan memperbaiki model jika diperlukan (misal menambahkan faktor yang belum dilibatkan, memvariasikan beberapa parameter, atau meniadakan beberapa asumsi yang sebelumnya dipakai). Proses ini akan diteruskan kembali ke semula seperti urutan di atas sampai dianggap model yang dibangun sudah menjawab permasalahan yang dikaji.



**Gambar 2.3** Siklus pemodelan matematika [diadaptasi dari (Giordano dkk., 2003) dengan penyesuaian].

Pemodelan matematika pada akhirnya menguji keterampilan matematika seseorang untuk mendapatkan jawaban yang berguna dari masalah nyata yang dikaji. Belajar penerapan matematika berbeda dengan belajar matematika itu sendiri. Pemodelan matematika dapat dipelajari hanya dengan praktik langsung (*Modelling can be learnt only by doing*) (Edwards dan Hamson, 1989).

## 2.2 Kuliah Pemodelan Matematika di Prodi Sarjana Matematika ITB

Perubahan kurikulum program studi sarjana dari 160 sks menjadi 144 sks di sekitar tahun 1994 memberikan beberapa perubahan pada struktur mata kuliah. Khususnya di Program Studi Sarjana Matematika ITB (Jurusan Matematika), Mata Kuliah Pemodelan Matematika menjadi salah satu mata kuliah yang diperkenalkan. Pada saat itu, pendekatan mata kuliah tersebut masih bersifat *textbook problem*; diawali dengan pengenalan beberapa model matematika tertentu (deterministik dan probabilistik), kemudian diakhiri dengan tugas proyek individu yang topiknya diusulkan sendiri oleh masing-masing peserta kuliah.

Di sekitar tahun 2000-an, pendekatan mata kuliah tersebut mengalami perubahan, dari *textbook problem* menjadi *problem-solving activity* (dipelopori oleh Prof. Edy Soewono dan Prof. Kuntjoro Adji). Peserta kuliah dibagi menjadi beberapa kelompok, satu kelompok terdiri atas 4 sampai dengan 5 orang mahasiswa, setiap kelompok memiliki proyek model tersendiri. Untuk melaksanakan kuliah ini, setiap semester diperlukan sekitar 20 sampai dengan 25 topik pemodelan. Tidak jarang para dosen yang menjadi *volunteer* harus bergerilya kepada para kolega di prodi-prodi lain di ITB untuk mendapatkan topik bagi mata kuliah ini.

Kuliah Pemodelan Matematika bertujuan untuk *melatih* mahasiswa menerjemahkan masalah dalam kehidupan nyata menjadi bentuk formulasi matematika yang “baik”. Kuliah ini menawarkan tehnik dasar pemodelan serta analisisnya pada masalah-masalah yang ada di kehidupan nyata seperti, masalah biologi dan populasi, masalah industri, dinamika fluida, keuangan dan lain-lain. Mata kuliah ini lebih menekankan pada proses pemodelan masalah nyata ke dalam formula matematika daripada kecanggihan substansi matematika yang akan digunakan dalam pemodelan. Setelah mengikuti kuliah ini, diharapkan mahasiswa: mampu mengenali masalah-masalah dunia nyata dan mengidentifikasi masalah yang penting ke dalam beberapa masalah spesifik yang dapat diselesaikan dengan menggunakan model matematika; memiliki keterampilan dalam menggunakan alat matematika untuk menemukan solusi, menafsirkan solusi, dan memvalidasi solusi menggunakan beberapa data yang tersedia dari dunia nyata; mampu mengorganisir pekerjaan dalam kelompok, dan berkomunikasi dalam mempresentasikan latar belakang masalah dunia nyata yang diamati sehingga bisa dimengerti oleh kalangan umum.

Berikut beberapa contoh topik pemodelan matematika pada saat penulis menjadi kordinator mata kuliah tersebut (2004-2007):

**Tabel 2.1** Topik Pemodelan Matematika 2004-2007.

No	Judul Proyek	Nara sumber
1	Desain molekular untuk kestabilan obat	Dr. Rahmana Emran (FA)
2	Bisakah kita membelah telur rebus menjadi dua bagian yang sama besar?	Nuning Nuraini, M.Si. (MA)
3	Reduksi gas buang kendaraan bermotor berbahan bakar bio-diesel pada knalpot	Dr. Ir. Yogi Wibisono B (TK)
4	<i>Flood planning in the dam-break problem</i> (MCM 2005)	Dr. Agus Yodi Gunawan (MA)
5	Dinamika obat lepas lambat dalam tubuh manusia	Dr. Maria Immaculata (FA)
6	Absorpsi obat dalam tubuh manusia	Dr. Kuntjoro Adji S (MA)

No	Judul Proyek	Nara sumber
7	Masalah pengendalian banjir Jakarta	Prof. Syahril Badri Kusuma (SI)
8	Mengapa Virus DBD lenyap dari tubuh penderita setelah 7 hari?	Prof. Edy Soewono (MA)
9	Masalah Gas Lift dalam EOR	Prof. Dr. Ir. Septoratto (TM)
10	Bagaimana mengatur penempatan item di supermarket	Prof. Edy T. Baskoro (MA)
11	Pemetaan <i>Water Loss</i> di jaringan pipa PDAM	Dr. Rieske Hadianti (MA)
12	Gasifikasi Batubara	Dr. Ir. Yazid Bindar (TK)
13	Penentuan jumlah perwakilan dalam pemilihan anggota DPR	Dr. Janson Naiborhu (MA)
14	Portofolio yang Efisien	Dr. Novriana Sumarti
15	How much a beach reflect the incident waves?	Dr. Andonowati (MA)

Berikut beberapa contoh topik pemodelan di era sekarang (2023/2024):

**Tabel 2.2** Topik Pemodelan Matematika 2023/2024.

No	Judul Proyek	Nara sumber
1	Perencanaan lintasan penerbangan	Dr. Ahmad Muchlis (MA)
2	Peta risiko DBD Kota Bandung	Prof. Dr. Nuning Nuraini (MA)
3	Dampak Tsunami di pesisir Teluk Palu	Prof. Dr. Sri Redjeki P (MA)
4	Time Series Classifications	Prof. Dr. Agus Yodi Gunawan (MA) & Ghany (IDSC)
5	Sinkronisasi	Dr. Rudy Kusdiantara (MA)
6	Angin dan tinggi lari estafet	Prof. Dr. Kuntjoro Adji S (MA)
7	Dinamika keanggotaan JamKes	Dr. Dila Puspita (MA)
8	Propagasi hoax	Dr. Dewi Handayani (MA)
9	Penyakit generatif	Dr. Prama Setya Putra (MA)
10	Orbit planet	Prof. Dr. Kuntjoro Adji S (MA)

Dapat menjadi catatan di sini bahwa ada kecenderungan topik-topik yang disajikan di era sekarang masih minim melibatkan kolega lain di luar Prodi Matematika. Kolaborasi dengan disiplin ilmu lain di ITB, khususnya, perlu kembali ‘dinyalakan’. Proses ‘gerilya’ ke kolega-kolega lain di ITB perlu dihidupkan kembali. Hal ini akan menjadi tantangan ke depan bagi para *volunteer* pengampu mata kuliah tersebut. Selain itu, peningkatan wawasan dosen pengampu sendiri perlu ditingkatkan, perlu kembali menginisiasi komunikasi dan kolaborasi dengan kolega-kolega lain di luar matematika, maupun para praktisi di dunia industri.

Ada catatan kecil penulis saat mengampu mata kuliah pemodelan ini. Judul topik yang berbau non-matematis jarang dipilih oleh mahasiswa. Sebagai contoh, ketika topik yang diajukan berasal dari dunia kedokteran bedah, yaitu seputar *Surgical Freedom* (SF), ukuran kebebasan dari sebuah

instrumen bedah pada daerah pembedahan tertentu (pada permukaan kulit) yang harus diperhitungkan oleh seorang ahli bedah, tidak ada mahasiswa yang memilih topik tersebut. SF ini disajikan dalam bentuk volume sebuah koridor bedah yang biasa dimodelkan berbentuk kerucut dengan alas pada permukaan kulit yang bentuknya mirip poligon. Pada tahun berikutnya topik tersebut diajukan kembali dengan mengganti judulnya menjadi '*Menghitung luas poligon konveks dan tak konveks pada suatu permukaan*'. Barulah ada mahasiswa yang memilih. Hal ini memberikan pelajaran bahwa tahap memformulasikan dari masalah nyata ke dalam formula matematika mungkin merupakan tahap yang paling sulit dilewati oleh mahasiswa. Terlalu canggih bahasa yang digunakan, malah menakutkan bagi sebagian mahasiswa. *Modelling can be learnt only by doing* (Edwards dan Hamson, 1989).

Untuk menambah pengalaman dan kemampuan mahasiswa terhadap pemodelan matematika, Prodi Sarjana Matematika sudah sejak lama mengirimkan mahasiswanya pada kegiatan lomba pemodelan matematika berskala internasional: The Mathematical Contest in Modeling (MCM) dan The Interdisciplinary Contest in Modeling (ICM), yang diselenggarakan oleh Consortium for Mathematics and its Applications (COMAP) dengan motonya '*Using mathematical tools to explore real-world problems*'. Prestasi yang telah diperoleh cukup beragam mulai dari *successful participant* sampai dengan *meritorious* (belum sampai predikat *outstanding winner*).



### 3 MATEMATIKA INDUSTRI

Di tahun akhir program magister, penulis mulai diperkenalkan oleh dosen-dosen senior pada suatu kegiatan akademik yang menyatukan antara keilmuan matematika dengan masalah nyata di industri, yaitu *Industrial Mathematic Week* (IMW). Pada kegiatan tersebut selain pakar dalam negeri, beberapa pakar dari luar negeri, seperti dari Belanda dan Australia didatangkan. Banyak pengalaman berharga dari kegiatan tersebut, salah satunya adalah menambah wawasan untuk belajar *berkomunikasi* dan *berkolaborasi* dengan disiplin ilmu lain untuk mencari solusi dari masalah industri yang dihadapi.

Pada kegiatan IMW tersebut akhirnya penulis dipertemukan dengan pembimbing program doktor dan kemudian menyelesaikan program doktor di TU Eindhoven Belanda selama 4 tahun dengan beasiswa QUE-Project. Topik yang dipilih adalah pemodelan matematika di bidang *Rheology/ Fluid Mechanics*. Selama kurun waktu mengikuti program doktor, penulis juga didorong oleh pembimbing untuk ikut kegiatan serupa dengan IMW yang diberi nama *Study Group Mathematics With Industry* (SGWI). Pengalaman menyelesaikan topik program doktor telah memberikan bekal bagi penulis untuk dapat berkiprah lebih dalam di bidang yang terkait topik *Rheology/Fluid Mechanics*, yaitu Pemodelan Matematika Fluida. Pengalaman lain yang diperoleh melalui kegiatan-kegiatan IMW dan SGWI juga memberikan peluang untuk dapat berkontribusi pada bidang lain, yaitu *Industrial Mathematics* (Matematika Industri).

Stockie (2015) menuliskan dalam artikelnya bahwa ketika seseorang bertanya mengenai profesinya, jawaban ringkas yang biasa diberikan adalah “*I am an Industrial Mathematician* (Saya seorang ahli matematika industri)”. Selanjutnya, ia menuliskan “Namun, pernyataan yang tampak lugas tersebut biasanya disambut dengan rasa tidak nyaman, diam, terlepas dari apakah saya sedang berbicara dengan sesama ahli matematika atau non-matematika. Saya biasanya mengikuti dengan klarifikasi: “*I am an applied mathematician who derives much of my inspiration from the study of industrial problems that I encounter through collaborations with companies* (Saya adalah seorang ahli matematika terapan yang mendapatkan banyak inspirasi dari studi masalah-masalah industri yang saya temui melalui kolaborasi dengan perusahaan).”

Pemahaman terhadap istilah matematika industri setidaknya bisa dimulai dari kedua kata yang melekat pada istilah tersebut. Istilah *industri* mempunyai arti yang sangat luas, mencakup segala bidang yang memiliki manfaat komersial atau sosial, baik itu desain motor listrik yang optimal, pemodelan pilihan keuangan, atau bahkan klasifikasi interaksi sosiologis (Bohun, 2014; Stockie, 2015). Kata *matematika* di sini dimaksudkan untuk setiap cabang matematika murni atau terapan, statistik atau ilmu komputasi yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah yang ada di industri (Stockie, 2015)). Jadi matematika industri akan merujuk pada penerapan keilmuan matematika pada masalah-masalah yang muncul dari aplikasi industri (Stockie, 2015).

Selanjutnya, (Stockie, 2015) merinci pembagian dari matematika industri ini (selanjutnya disingkat dengan IM (*industrial mathematics*)) menjadi 3 kelompok:

- a. *Mathematics IN Industry* (MII): matematika yang dikerjakan oleh matematikawan non-akademik yang bekerja sebagai karyawan suatu perusahaan; tujuannya: penemuan hal baru dalam produk/proses,
- b. *Mathematics FOR Industry* (MFI): matematika yang dilakukan oleh matematikawan (akademisi) di universitas sebagai bagian dari kerja sama dengan perusahaan; tujuannya: penemuan hal baru dalam keilmuan matematika juga produk/proses.
- c. *Mathematics INSPIRED By Industry* (MIBI): matematika yang dikerjakan oleh matematikawan (akademisi) pada suatu masalah yang berasal dari dunia industri, tetapi ruang lingkup pekerjaannya tidak terbatas oleh suatu perjanjian kerja sama. Masalah industri yang dimulai sebagai MII atau MFI dapat dilanjutkan menjadi masalah penelitian yang bukan merupakan kepentingan langsung mitra industri, tetapi tetap dapat menghasilkan sebuah publikasi akademis; tujuannya: penemuan hal baru dalam keilmuan matematika.

Sebagai ringkasan, (Stockie, 2015) mendeskripsikan keempat domain tadi, yaitu IM, MII, MFI, dan MIBI, dalam bentuk

$$IM = MII \cup MFI \cup MIBI.$$

Dalam ruang lingkup penelitian penulis sendiri, hampir semua topikny masih berada di domain MIBI. Masa mendatang, semoga melalui promosi

matematika dan kolaborasi dengan pihak-pihak lain penelitian yang dikerjakan dapat merambah pada domain yang lainnya.

Pada tingkat internasional, matematika industri merupakan bidang yang sudah mapan (*well-established*) dalam komunitas keilmuan matematika. Di Eropa, setiap tahun diadakan kegiatan ESGI (European Study Group with Industry), diikuti akademisi, pelajar, praktisi, dan perwakilan industri. Hal yang sama di Belanda dengan SGWI-nya (Study Group Mathematics With Industry), di Australia dengan MISG-nya (Mathematics in Industry Study Group). Di ITB sendiri, melalui KK Matematika Industri dan Keuangan FMIPA kegiatan serupa pernah dilakukan, Industrial Mathematics Week (IMW) di tahun 2010, 2017 dan 2019. Namun tentunya belum diadakan secara rutin dan ideal seperti yang dilakukan di tempat-tempat tersebut di atas.



## 4 RINGKASAN BEBERAPA PENELITIAN

Pada bagian ini akan disajikan 13 topik penelitian penulis dkk.. Tanpa mengurangi apresiasi pada hasil penelitian lainnya, jumlah tersebut dipilih karena keterbatasan waktu penulis untuk membuat naskah ini. Topik yang dipilih meliputi bidang fluida, ilmu hayati (*life-sciences*), data/sistem informasi, maupun gempa bumi. Beberapa di antaranya termasuk pada topik penelitian matematika industri (khususnya MIBI). Secara umum, untuk setiap topik akan berisi: Sumber rujukan, Pendahuluan (deskripsi masalah), Tujuan Penelitian, Model Matematika, Metode Solusi, Hasil, dan Kesimpulan. Untuk topik penelitian penulis dkk. lainnya dapat dilihat di daftar Publikasi pada bagian Curriculum Vitae.

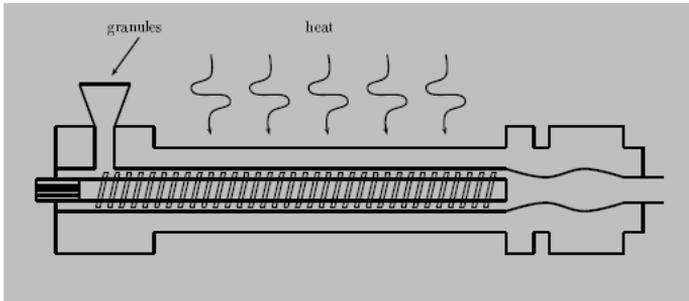
Topik penelitian yang disajikan cukup beragam, hampir semuanya merupakan topik penelitian mahasiswa program doktor yang dibimbing penulis. Beberapa topik penelitian yang dikerjakan disesuaikan dengan misi dari institusi di mana mahasiswa tersebut (yang telah menjadi dosen) bekerja. Kekurangan informasi non-matematis yang terkait diimbangi melalui kolaborasi dengan kolega lain di bidang yang bersesuaian.

### 4.1 Proses Pemutusan Benang Polimer

**Sumber:** A.Y. Gunawan, *Stability of Immersed Liquid Threads*, Disertasi Doktor TU/e-NL, 2004.

**Pendahuluan:** Suatu bahan sintesis dapat diproduksi dengan mencampurkan berbagai jenis polimer. Sifat material campuran polimer sangat terkait dengan morfologinya yang ditentukan oleh proses pencampuran benang polimer dalam ekstruder. Sifat bahan tersebut dapat diprediksi hanya jika pemahaman menyeluruh tentang proses pencampuran ini dapat diperoleh.

Pada *extruder* (lihat Gambar 4.1), butiran kering dari dua jenis polimer dimasukkan ke dalam *hopper*. Dikarenakan adanya pemanasan oleh sumber panas eksternal dan gesekan internal, butiran meleleh dan bercampur. Saat kondisi lelehan, kita membedakan antara fase terdispersi dan fase kontinu (atau fase matriks). Polimer dengan fraksi volume rendah disebut fase terdispersi.

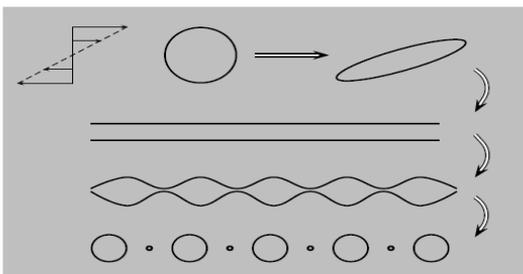


**Gambar 4.1** Sketsa sebuah *extruder* [Sumber: Disertasi Doktor].

Pencampuran pada proses ini bergantung pada besarnya bilangan kapiler  $Ca$ , yang didefinisikan sebagai

$$Ca = \frac{a\Pi}{\sigma},$$

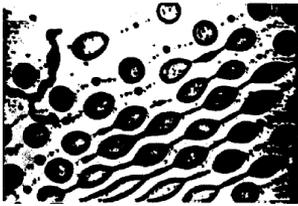
dengan  $\Pi$  menyatakan tegangan geser lokal yang ditimbulkan ulir pada extruder,  $\sigma$  menyatakan tegangan antar muka dua fase, dan  $a$  merupakan jari-jari karakteristik dari benang polimer pada fase terdispersi. Karena tegangan geser yang dominan, terbentuklah benang polimer panjang. Pada suatu saat tertentu benang ini menjadi sangat tipis, jari-jarinya menjadi sangat kecil, sehingga tegangan antar muka menjadi dominan. Dampak dari situasi terakhir ini adalah kecenderungan benang polimer terputus dan mencapai bentuk berupa butiran polimer (*drop*). Ilustrasi proses ini digambarkan pada Gambar 4.2.



**Gambar 4.2** Ilustrasi proses pemutusan benang (*thread*) menjadi butiran polimer (*drop*) [Sumber: Disertasi Doktor].

Sebuah percobaan yang dilaporkan oleh (Knops,1997) memperlihatkan bahwa benang yang berdekatan terputus membentuk formasi *in-phase* atau *out-of-phase*. Kedua kemungkinan formasi ditunjukkan pada Gambar 4.3.

Bagian kiri menunjukkan proses terputusnya benang-benang polimer sejajar untuk kasus benang kurang kental dibandingkan fase matriksnya. Hasilnya menunjukkan bahwa benang terputus dengan formasi *out-of-phase*: posisi di mana salah satu benang mengembang, benang yang berdekutannya menyempit. Bagian Kanan menunjukkan proses terputusnya benang-benang polimer sejajar ketika benang lebih kental daripada fase matriksnya. Hasilnya menunjukkan bahwa benang terputus dengan formasi *in-phase*: benang yang berdekatan mengembang dan menyempit pada posisi yang sama.



(a) Out-of-phase break-up of PA-6 (polyamide) threads in a matrix of PS-N7000 (polystyrene).

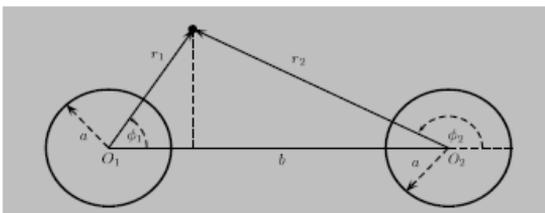


(b) In-phase break-up of PA-6 (polyamide) threads in a matrix of PS-N1000 (polystyrene).

**Gambar 4.3** Hasil percobaan yang dilaporkan Knops (1997) [Sumber: Disertasi Doktor].

**Tujuan penelitian:** Penelitian yang dilakukan akan mempelajari secara analitis asal usul fenomena yang dijelaskan di bagian atas tadi, dan menyelidiki bagaimana formasi putusnya benang polimer dapat dikontrol dengan menyesuaikan sifat polimernya.

**Model Matematika:** Model meninjau keadaan dua benang polimer sejajar yang cukup panjang (fase terdispersi), keduanya berjari-jari  $a$  dan viskositas  $\eta^d$ , yang berada pada lingkungan fluida kental dengan viskositas  $\eta^c$  (fase kontinu). Perbandingan antara kedua viskositas tersebut akan dinyatakan oleh  $\mu = \eta^d / \eta^c$ . Misalkan pula  $b$  adalah jarak antara dua pusat benang. Pada Gambar 4.4 disajikan sketsa penampang aksial benang dengan indeks 1 dan 2 mengacu pada benang 1 dan benang 2.



**Gambar 4.4** Sistem kordinat pada masing-masing benang [Sumber: Disertasi Doktor].

Dua sistem koordinat tabung akan digunakan:  $(r_1; \phi_1; z_1)$  berpusat di sepanjang sumbu benang 1, dan  $(r_2; \phi_2; z_2)$  berpusat di sepanjang sumbu benang 2. Jika benang ke- $J$  ( $J = 1, 2$ ) diambil sebagai kerangka acuan, maka akan diperoleh relasi berikut, untuk  $j, J=1,2$ ,

$$\begin{aligned} r_J \cos \phi_J &= (j - J)b + r_j \cos \phi_j, \\ r_J \sin \phi_J &= r_j \sin \phi_j, \\ z_J &= z_j. \end{aligned}$$

Selanjutnya, benang diasumsikan terperturbasi secara periodik di  $z$  dengan bilangan gelombang  $k$  dan periodik di  $\phi$ . Ketergantungan pada  $\phi$  akan ditulis sebagai ekspansi Fourier. Jadi, permukaan benang terperturbasi  $R_j$  ( $j = 1, 2$ ) dapat dituliskan sebagai

$$R_j(\phi_j, z, t) = a \left[ 1 + \epsilon \left( \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{j,m}(t) \cos m\phi_j \right) \cos(k_j z - \alpha_j) \right].$$

Pada persamaan tersebut karena posisi benang-benangnya sejajar, maka koordinat  $z$  nya identik, sehingga indeks  $j$  pada peubah ini dapat dihilangkan. Parameter  $\epsilon$  merupakan parameter perturbasi ( $0 < \epsilon \ll 1$ ),  $\varepsilon_{j,m}(t)$  menyatakan amplitudo mode  $m$  yang bergantung pada waktu  $t$  untuk benang ke- $j$  dengan fasa  $\alpha_j$ . Dikarenakan hanya perbedaan fasa saja yang menjadi perhatian, maka kita dapat memilih  $\alpha_1 = 0$  dan  $\alpha_2 = \alpha$ . Untuk sementara parameter  $\alpha$  ini tidak diketahui; parameter ini menjadi bagian dari solusi yang perlu dicari.

Fluida diasumsikan bersifat Newton, dalam keadaan diam, tidak termampatkan, dan sangat kental sehingga sistem diatur oleh persamaan Stokes:

$$\begin{aligned} 0 &= \text{div } \mathbf{v} , \\ \text{grad } p &= \hat{\eta} \text{div } (\text{grad } \mathbf{v})^T . \end{aligned}$$

Peubah  $\mathbf{v}$  dan  $p$  pada persamaan tersebut masing-masing merupakan medan kecepatan dan tekanan yang terperturbasi. Parameter  $\hat{\eta}$  adalah  $\hat{\eta} = \eta^d$  untuk kekentalan benang dan  $\hat{\eta} = \eta^c$  untuk kekentalan fluida sekitarnya. Untuk kondisi batas, pada antarmuka berlaku kekontinuan kecepatan, kondisi dinamis untuk tegangan, dan kondisi kinematik yang menyatakan bahwa

permukaan adalah permukaan material (kecepatan dalam arah radial  $r$  merupakan turunan material yang mengikuti gerak partikel).

**Metode solusi:** Persamaan utama (Persamaan Stokes) akan diselesaikan dengan menggunakan teknik deret Fourier yang mengikuti formula permukaan benang terperturbasi. Kebergantungan solusi pada sistem kordinat satu benang terhadap sistem kordinat benang lainnya diselesaikan melalui formula *Graf's Addition Theorem* untuk Fungsi Bessel. Penentuan koefisien Fourier untuk sembarang mode diselesaikan melalui metode momen. Konsep kestabilan linear selanjutnya diterapkan untuk menentukan formasi terputusnya benang polimer. Untuk setiap pemotongan koefisien Fourier sampai dengan suku ke- $M$ , konsep kestabilan ini mengantarkan pada sistem persamaan diferensial linear

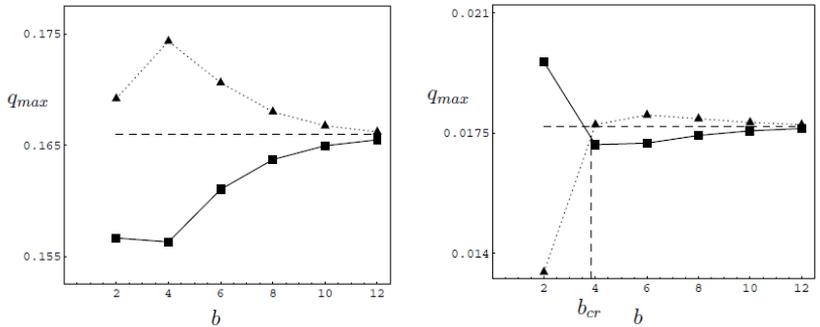
$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{Q}(k, \mu, b)y,$$

dengan elemen vektor  $\mathbf{y}$  memuat amplitudo mode  $m$ ,  $\varepsilon_{j,m}(t)$  .,  $m=1\dots M$ , matriks  $\mathbf{Q}$  memuat parameter-parameter bilangan gelombang  $k$ , perbandingan viskositas  $\mu = \eta^d / \eta^c$ , dan jarak antara dua pusat benang  $b$ . Ukuran ketidakstabilan benang (proses terputusnya benang) diberikan oleh nilai eigen matriks  $\mathbf{Q}$  dengan bagian real positif terbesar  $q_{\max}$ .

**Hasil:** Metode solusi yang digunakan mengantarkan pada kesimpulan bahwa ada dua nilai fasa  $\alpha$  yang mungkin, yaitu  $0$  (*in-phase*) atau  $\pi$  (*out-of-phase*). Kedua nilai tersebut akan disebut sebagai *pola fasa*. Perhitungan akan dibagi menjadi 2 kasus, yaitu untuk  $\mu < 1$  dan  $\mu > 1$ . Untuk kasus pertama mengisyaratkan bahwa viskositas benang polimer lebih rendah dibandingkan viskositas fluida sekitarnya. Untuk kasus kedua memberikan arti yang sebaliknya. Hasil yang akan diperlihatkan dihitung dengan pendekatan deret Fourier sampai dengan suku ke- $M=1$  (*first-order approximation*).

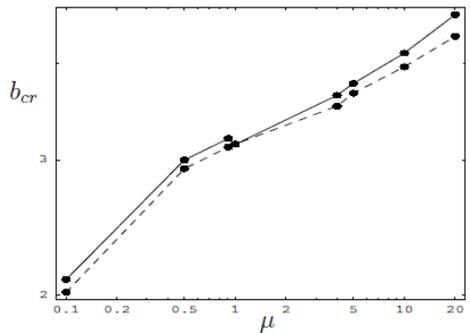
Pada Gambar 4.5 (Kiri) dapat dilihat bahwa untuk kasus viskositas benang polimer lebih rendah dibandingkan viskositas fluida sekitarnya kedua benang akan terputus dalam formasi *out-of-phase*. Pada Gambar 4.5 (Kanan), untuk kasus viskositas benang polimer lebih tinggi dibandingkan viskositas fluida sekitarnya kedua benang akan terputus dalam formasi *out-of-phase* atau *in-phase* bergantung pada jarak  $b$ . Terdapat nilai jarak kritis  $b_{cr}$  sedemikian

sehingga jika  $b < b_{cr}$  benang akan terputus dalam formasi *in-phase*, sedangkan jika  $b > b_{cr}$  kedua benang akan putus dalam formasi *out-of-phase*.



**Gambar 4.5** Grafik  $q_{max}$  sebagai fungsi jarak  $b$ . Simbol segitiga menyatakan proses *out-of-phase*, simbol segiempat meyakinkan proses *in-phase*. (Kiri  $\mu = 0,04$  ; (Kanan)  $\mu = 4$  [Sumber: Disertasi Doktor].

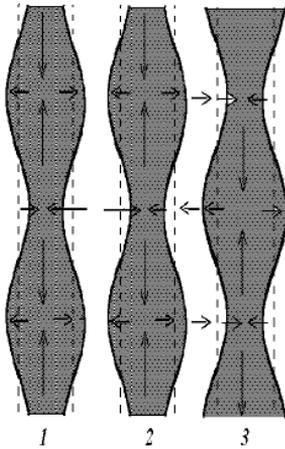
Pada Gambar 4.6 dapat dilihat grafik nilai jarak kritis  $b_{cr}$  terhadap perbandingan viskositas  $\mu$ , untuk pendekatan deret Fourier suku ke-0 /*zeroth-order approximation* (garis tebal) dan ke-1/*first-order approximation* (garis putus-putus). Hasil tersebut memperlihatkan bahwa kedua pendekatan memberikan hasil yang hampir sama, sehingga pendekatan suku ke-0 sudah cukup untuk menjelaskan fenomena yang diamati.



**Gambar 4.6** Grafik jarak kritis terhadap perbandingan viskositas (skala logaritmik) [Sumber: Disertasi Doktor].

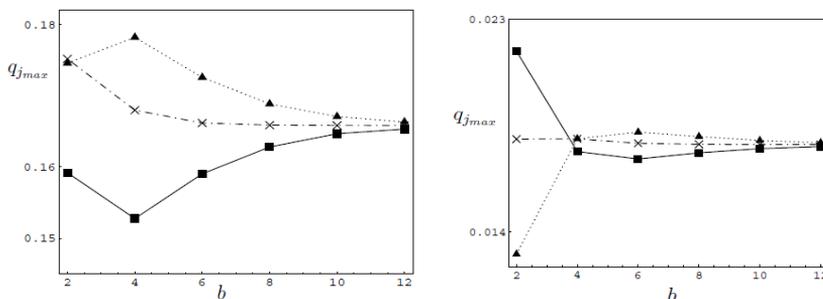
Pendekatan dua benang di atas kemudian dilanjutkan untuk melihat fenomena pada N- benang. Sebagai ilustrasi, pada Gambar 4.7 diberikan salah satu formasi proses terputusnya 3-benang, yang dinotasikan oleh vektor (1,1,-1) (formasi campuran). Secara umum, berdasarkan kesimetrian, pola lain

yang mungkin adalah (1,1,1) (formasi *in-phase*) dan (1,-1,1) (formasi *out-of-phase*).



**Gambar 4.7** Salah satu formasi proses terputusnya 3-benang [Sumber: Disertasi Doktor].

Pada Gambar 4.8 (Kiri) disajikan tiga pola yang mungkin untuk proses 3-benang: (1,1,1) (simbol segiempat), (1,-1,1) (simbol segitiga), dan (1,1,-1) (simbol silang). Hasil yang diperoleh konsisten dengan hasil sebelumnya, dalam arti bahwa untuk kasus viskositas benang polimer lebih rendah dibandingkan viskositas fluida sekitarnya proses terputus benang didominasi oleh formasi *out-of-phase*. Untuk kasus viskositas benang polimer lebih tinggi dibandingkan viskositas fluida sekitarnya proses terputus benang didominasi oleh pola *in-phase* sampai dengan jarak tertentu, jika jarak benang lebih besar dari jarak tersebut maka proses terputus benang didominasi oleh formasi *out-of-phase* (lihat Gambar 4.8 (Kanan)).



**Gambar 4.8** Grafik  $q_{max}$  sebagai fungsi jarak  $b$ . Simbol segitiga menyatakan formasi *out-of-phase*, simbol segiempat menyatakan formasi *in-phase*, simbol silang menyatakan formasi campuran. (Kiri)  $\mu = 0,04$ ; (Kanan)  $\mu = 4$  [Sumber: Disertasi Doktor].

**Kesimpulan:** Pada penelitian ini telah dijelaskan melalui pendekatan analitis dua hasil eksperimen proses pemutusan benang polimer: formasi *in-phase* dan formasi *out-of-phase*. Untuk kasus viskositas fasa terdispersi (benang polimer) lebih rendah dibandingkan viskositas fasa kontinu (fluida sekitarnya) proses terputus benang didominasi oleh formasi *out-of-phase*. Untuk kasus viskositas fasa terdispersi (benang polimer) lebih tinggi dibandingkan viskositas fasa kontinu (fluida sekitarnya) proses terputus benang didominasi oleh formasi *in-phase* sampai dengan jarak tertentu; jika jarak benang-benang lebih besar dari jarak tersebut maka proses terputus benang didominasi oleh formasi *out-of-phase*. Dari sudut pandang proses pencampuran (*blending*) bahan sintesis, hasil ini dapat memberikan informasi penting untuk pengendalian proses produksi. Hasil yang disajikan menunjukkan bagaimana proses pencampuran ini dapat dikontrol dengan menyesuaikan sifat-sifat fluidanya.

## 4.2 Pemodelan Invasi Filtrat Lumpur

### Sumber:

Windarto, A.Y Gunawan, P. Sukarno, E. Soewono, *Modeling of mud filtrate invasion and damage zone formation*, Journal of Petroleum Science and Engineering 77 ,2011, p 359-364.

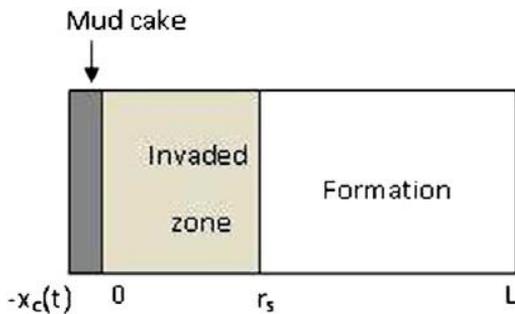
Windarto, A.Y Gunawan, P. Sukarno, E. Soewono, *Modelling of formation damage due to mud filtrate invasion in a radial flow system*, Journal of Petroleum Science and Engineering 100 ,2012, p. 99–105.

**Pendahuluan:** Pada keadaan ideal, tekanan lumpur pengeboran akan dipertahankan lebih tinggi dari tekanan formasi. Perbedaan tekanan ini menyebabkan invasi filtrat lumpur ke dalam formasi. Pada saat awal pengeboran, segera setelah mata bor menembus formasi, terjadi invasi lumpur yang cepat (*spurt loss*) ke dalam formasi. Invasi lumpur disebabkan oleh tidak adanya *cake filter* yang mencegah invasi partikel padat ke dalam pembentukan minyak. Selama periode ini, terjadi pengendapan partikel padat secara progresif di dalam media berpori, yang menciptakan internal *mud cake filter*. Periode ini adalah disebut periode semburan (*spurt period*), yang umumnya sangat singkat, hanya beberapa menit. Pada akhir periode semburan ini, internal *cake filter* terbentuk sempurna. Setelah itu, sebagian besar partikel padat tertahan di dalam lubang sumur, membuat lapisan

eksternal *mud cake filter*. Lapisan ini mengontrol laju invasi filtrat lumpur, sampai akhirnya *mud cake filter* ini menjadi *impermeable* dan filtrasi berhenti.

**Tujuan penelitian:** Pada penelitian ini akan dikembangkan sebuah model matematika untuk memperkirakan kedalaman invasi filtrat lumpur dari lumpur berbasis air yang melibatkan keberadaan lapisan awal lumpur (*mud cake filter/layer*) dan saturasi air yang tak tereduksi. Model mengkaji sistem aliran linier. Selanjutnya model tersebut diverifikasi menggunakan data eksperimen dari literatur.

**Model Matematika:** Selama injeksi cairan pengeboran ke dalam sampel inti akan terbentuk lapisan awal lumpur (*mud cake layer*). Lapisan ini terbentuk karena pengendapan partikel padat dari cairan. Situasi ini dapat dilihat pada Gambar 4.9.



**Gambar 4.9** Ilustrasi zona invasi dalam sistem aliran linier [Sumber: artikel penulis].

Beberapa asumsi yang berlaku pada sistem di atas antara lain: injeksi lumpur bersifat seragam dan dipandang sebagai aliran 1 fasa, tidak terjadi pencampuran antara lumpur dengan fluida yang didorong, berlaku Hukum Darcy, dan parameter fisik dan fluida lainnya diasumsikan konstan. Model yang diturunkan merupakan pengembangan dari model (Parn-anurak dan Engler, 2005), di mana pada model yang sekarang dimungkinkan bahwa partikel padat dapat berinvasi ke formasi. Hal ini dimungkinkan dengan menambahkan asumsi bahwa ukuran partikel padat pada lumpur pemboran lebih kecil dibandingkan dengan ukuran pori. Invasi lumpur padat dimodelkan sebanding dengan kecepatan filtrasi dan porositas formasi, yang selanjutnya disebut laju erosi. Pada bentuk model tak berdimensi, sistem disajikan oleh persamaan berikut:

- Kecepatan filtrasi:

$$u(t) = \frac{k_c / k}{\left(\frac{k_c}{k} + x_c(t)\right)},$$

- Perubahan ketebalan mud cake layer:

$$\frac{dx_c}{dt} = \frac{k\Delta p(1-\phi)C_{solid}t_0}{\mu_f L^2(1-\phi_c)\rho_c} \frac{k_c / k}{\left(\frac{k_c}{k} + x_c(t)\right)} - \frac{k_\tau \tau t_0}{(1-\phi_c)L\rho_c},$$

- Konsentrasi filtrasi:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{Pe} u(t) g \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u(t) \frac{\partial C}{\partial x},$$

Kondisi awal dan kondisi batas diberikan oleh

$$C(x, 0) = 0, \quad C(0, t) = 1, \quad \frac{\partial C}{\partial x}(1, t) = 0,$$

radius invasi lumpur dinyatakan oleh

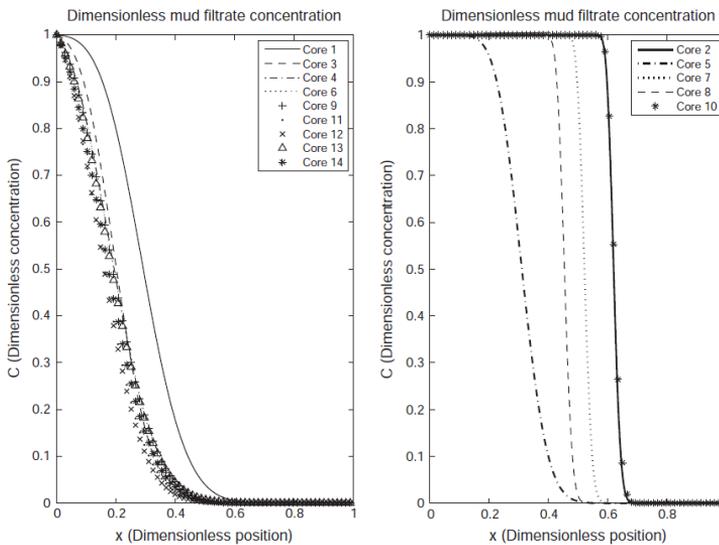
$$r_s = \max \left\{ x : C \left( x, \frac{t_{inj}}{t_0} \right) > C_d^* \right\},$$

Pada persamaan di atas,  $k$  dan  $k_c$  masing-masing menyatakan permeabilitas formasi dan *cake layer*,  $\Delta p$  beda tekanan,  $\phi$  ( $\phi_c$ ) porositas formasi (*cake layer*),  $C$  ( $C_{solid}$ ) konsentrasi filtrasi (partikel padat),  $k_\tau$  laju erosi,  $\tau$  tegangan geser,  $L$  panjang sampel (*core*),  $\mu_f$  viskositas filtrasi lumpur,  $\rho_c$  densitas *cake layer*,  $g$  parameter empiris, dan  $Pe$  Bilangan Peclet. Suku kedua pada persamaan kedua merupakan pengembangan model yang diusulkan penulis dkk.

**Metode solusi:** Secara umum, sistem persamaan diselesaikan secara numerik. Untuk kasus tidak terjadi erosi, tidak ada invasi partikel padat ke formasi, persamaan ketebalan *mud cake layer* dapat diperoleh secara analitik (hal yang sama untuk kecepatan filtrasi). Untuk simulasi numerik digunakan metode beda hingga dengan skema ruang terpusat waktu mundur. Lalu, linier sistem dari pendekatan beda hingga diselesaikan dengan menggunakan Eliminasi Gauss-Jordan untuk mendapatkan konsentrasi filtrat lumpur tak berdimensi.

**Hasil:** Model akan diverifikasi menggunakan data yang dipublikasikan dari (Yan dkk,1997). Dalam penelitian ini, invasi kedalaman cairan pengeboran diukur dari 30 menit filtrasi untuk 14 sampel *core*. Hasil estimasi dari model dibandingkan dengan hasil yang diukur dan korelasi empiris (Yan dkk, 1997). Sayangnya, data lumpur pengeboran yang telah digunakan untuk menginjeksikan sampel tidak tersedia. Untuk melengkapi data ini dilakukan estimasi dengan analisis sensitivitas.

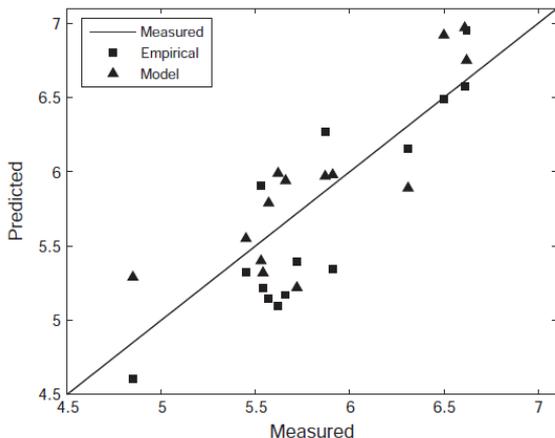
Pada Gambar 4.10 disajikan profil konsentrasi filtrat lumpur dalam versi tak berdimensi pada akhir waktu injeksi, untuk dua kasus, permeabilitas *mud cake layer* rendah (kiri) dan tinggi (kanan). Jika permeabilitas *mud cake layer* rendah, maka kecepatan filtrasi juga rendah. Dalam hal ini, invasi filtrat lumpur merupakan proses yang didominasi difusi. Fenomena ini terjadi pada 9 sampel *core* (Yan dkk, 1997) (lihat bagian kiri Gambar 4.10). Sebaliknya, jika permeabilitas *mud cake layer* tinggi, maka kecepatan filtrasinya tinggi. Dalam hal ini, invasi filtrat lumpur didominasi oleh proses konveksi. Fenomena ini terjadi pada 5 sampel *core* (Yan dkk, 1997) (lihat bagian kanan Gambar 4.10).



**Gambar 4.10** Profil konsentrasi filtrat lumpur untuk permeabilitas *mud cake layer*: rendah (kiri), tinggi (kanan) [Sumber: artikel penulis].

Dari profil konsentrasi, kedalaman invasi filtrat lumpur dapat diprediksi. Pada Gambar 4.11 disajikan kedalaman invasi filtrat lumpur dibandingkan dengan hasil yang dipublikasikan oleh (Yan dkk, 1997). Kesalahan relatif

untuk semua sampel *core* adalah kurang dari 10%. Fakta ini menegaskan validitas model yang diusulkan.



**Gambar 4.11** Perbandingan hasil kedalaman invasi filtrat lumpur: pengukuran, empiris (Yan dkk, 1997), model yang diusulkan [Sumber: artikel penulis].

**Kesimpulan:** Pada penelitian ini telah dikembangkan sebuah model matematika untuk invasi filtrat lumpur ke dalam formasi minyak untuk sistem aliran linier. Model mengakomodir keberadaan *mud cake layer* dan saturasi air yang tidak tereduksi. Kriteria sederhana untuk memperkirakan radius invasi filtrat lumpur juga diusulkan. Proses invasi dapat didominasi oleh difusi proses maupun didominasi konveksi, bergantung pada besaran permeabilitas pada *mud cake layer*. Model telah diverifikasi menggunakan data eksperimen yang dikutip dari literatur dengan kesalahan relatif untuk semua sampel *core* adalah kurang dari 10%.

**Tambahan:** Model invasi filtrat lumpur dari aliran linear telah dikembangkan pada aliran radial. Persamaan yang diperoleh semuanya dinyatakan dalam sistem koordinat kutub. Untuk menghitung kerusakan formasi digunakan *skin parameter* yang diusulkan oleh (Hawkins, 1956), yang merupakan fungsi dari jari-jari invasi lumpur, untuk kasus kerusakan formasi seragam. Dalam penelitian penulis dkk. dikembangkan parameter tersebut untuk kasus kerusakan formasi yang tidak seragam. Model kemudian dibandingkan dengan data tiga sumur vertikal dari (Yan dkk, 1997). Perkiraan hasil reduksi permeabilitas dan *skin parameter* dari model sesuai dengan data (hasil lebih detail dapat dilihat pada karya ilmiah yang kedua pada bagian awal pembahasan topik ini).

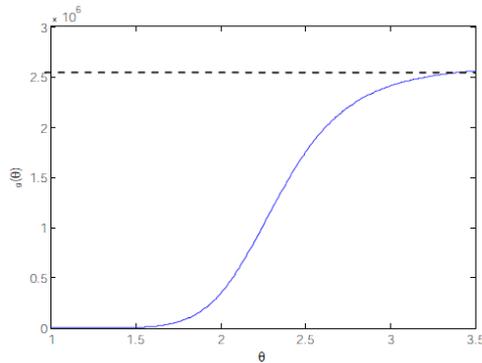
### 4.3 Pemodelan Konversi Oksidasi Metana Dalam *Reverse Flow Reactor* (RFR)

**Sumber:** A. Nuryaman, A.Y Gunawan, K.A. Sidarto, Y.W Budhi, *A Singular Perturbation Problem for Steady State Conversion of Methane Oxidation in a Reverse Flow Reactor*, ITB Journal of Sciences 44 A (3), 2012, p. 275-284.

**Pendahuluan:** Salah satu konsep yang berhasil digunakan dalam pembakaran metana adalah penggunaan reaktor aliran balik (*Reverse Flow Reactor/RFR*). RFR merupakan reaktor yang mempunyai ruang dengan arah aliran secara berkala dibalik untuk menjebak zona panas di dalamnya. Proses pembakaran pada RFR biasanya dimodelkan oleh persamaan reaksi-konveksi-difusi dengan koefisien-koefisiennya bergantung waktu dan kondisi batas yang dibangun periodik terhadap waktu. Model yang dibangun dipandang memenuhi asumsi *pseudo-homogen* satu dimensi dengan variasi suhu kecil dan tidak ada kehilangan panas. Hal ini mengantarkan pada persamaan konversi dengan suhu tetap dan laju reaksi tak linier. Penerapan analisis dimensi mengantarkan pada persamaan tak berdimensi yang memuat parameter kecil pada suku turunan berorde tertinggi. Hal ini mengindikasikan terjadinya masalah lapis batas (*boundary layer problem*).

**Tujuan penelitian:** Pada penelitian akan dikaji solusi keadaan tunak satu dimensi (arah kiri ke kanan) proses konversi oksidasi metana dalam *Reverse Flow Reactor* (RFR). Masalah lapis batas (*boundary layer problem*) yang ditemukan akan diselesaikan menggunakan metode ekspansi asimtotik. Selanjutnya, solusi asimtotik akan dibandingkan dengan solusi numerik dan solusi eksak dari persamaan yang diturunkan (cukup beruntung persamaan yang diperoleh merupakan persamaan diferensial orde-2 dengan koefisien konstan).

**Model Matematika:** Model yang diturunkan mengasumsikan bahwa sistem mencapai kondisi tunak dan laju reaksi dihitung pada suhu tertentu (konstan) sehingga proses pada reaktor masih dapat bekerja. Gambar 4.12 menyatakan kurva tak linier dari laju reaksi terhadap suhu. Model yang dibangun akan dihitung pada laju reaksi di sekitar garis putus-putus.



**Gambar 4.12** Kurva laju reaksi terhadap suhu [Sumber: artikel penulis].

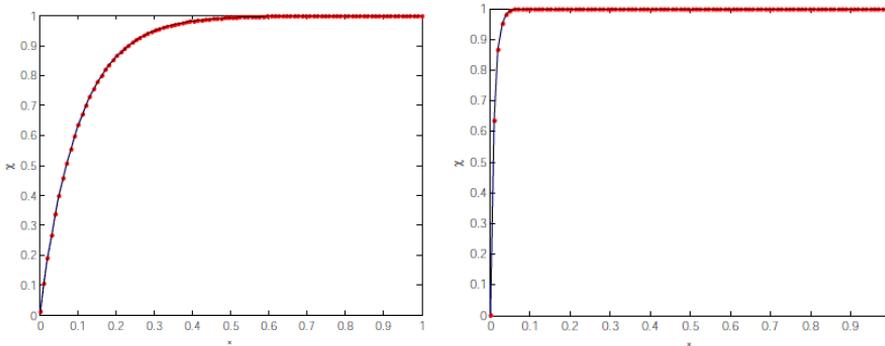
Berdasarkan kondisi di atas dan parameter-parameter yang ada di literatur, persamaan energi dari proses tersebut dapat dihilangkan sehingga model diwakili oleh persamaan diferensial biasa (dalam bentuk tak berdimensi)

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \chi'' - \mu \varepsilon \chi' + (1 - \chi) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \varepsilon^2 \chi'(0) &= \mu \chi(0), \quad \chi'(1) = 0 \end{aligned}$$

dengan  $\chi(x)$  menyatakan ukuran konversi metana pada setiap posisi  $x$ ,  $\varepsilon$  menyatakan parameter dengan orde sekitar  $10^{-3}$ - $10^{-2}$ , dan  $\mu$  sebuah parameter  $O(1)$ . Persamaan kedua menyatakan kondisi batas pada kedua ujung reaktor. Untuk  $\varepsilon=0$ , orde persamaan menjadi lebih rendah. Hal ini mengantarkan kita pada masalah perturbasi singular (*boundary layer problem*).

**Metode solusi:** Pendekatan solusi akan dilakukan melalui metode asimtotik, metode eksak, dan metode numerik. Untuk metode asimtotik, teknik *matched asymptotic expansion* (MAE) akan digunakan. Dengan mengasumsikan bahwa fenomena lapis batas terjadi pada ujung kiri reaktor ( $x=0$ ), solusi dibagi menjadi dua tipe: *inner solution* dan *outer solution*. Melalui proses *matching* dari kedua solusi tersebut, solusi akhir dari model matematika yang diturunkan akan diperoleh. Untuk pendekatan numerik, penyelesaian akan menggunakan toolbox MATLAB untuk menyelesaikan masalah nilai batas persamaan diferensial.

**Hasil:** Pada Gambar 4.13 disajikan perbandingan hasil dari solusi asimtotik (garis padat), solusi eksak (garis putus-putus), dan solusi numerik (titik-titik), untuk  $\epsilon=0,05$  (kiri) dan  $\epsilon=0,005$  (kanan). Hasil memperlihatkan bahwa pendekatan asimtotik yang digunakan sudah cukup baik dan sejalan dengan solusi eksaknya.



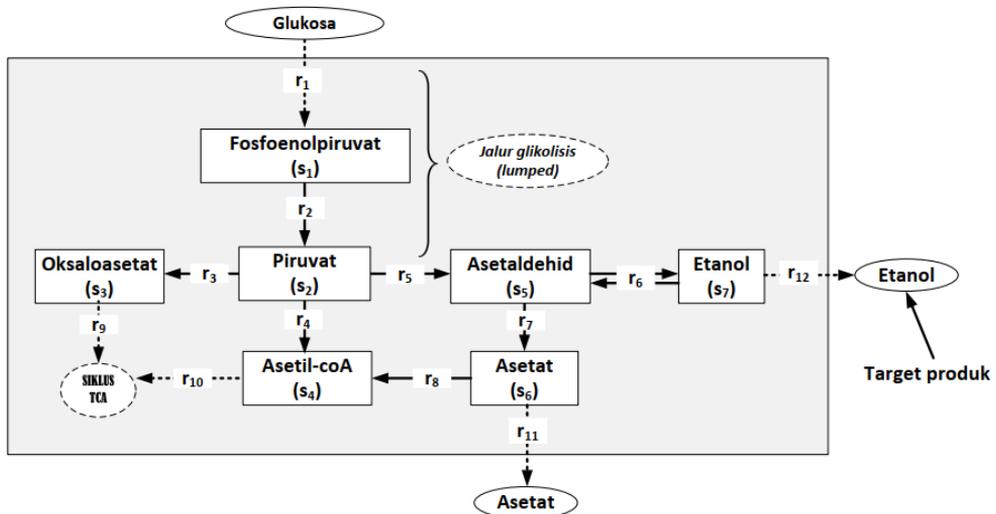
**Gambar 4.13** Grafik konversi  $\chi$  sebagai fungsi posisi  $x$ , untuk  $\epsilon=0,05$  (kiri) dan  $\epsilon=0,005$  (kanan); solusi asimtotik (garis padat), solusi eksak (garis putus-putus), dan solusi numerik (titik-titik) [Sumber: artikel penulis].

**Kesimpulan:** Pada penelitian telah dikaji model matematika untuk konversi keadaan tunak dari proses oksidasi metana dalam aliran terbalik reaktor dalam kondisi isothermal. Parameter kecil yang termuat pada persamaan mengantarkan pada masalah lapis batas. Menggunakan ekspansi asimtotik dengan asumsi bahwa lapisan batas terjadi pada ujung kiri reaktor ( $x=0$ ), solusi hampiran orde satu dibangun. Hasil memperlihatkan bahwa solusi asimtotik cukup sesuai dengan solusi eksak dan solusi numerik. Hal lain yang dapat diperoleh dari kajian ini adalah pendekatan asimtotik dapat menjadi alternatif untuk memperoleh solusi hampiran sebuah sistem yang kompleks.

#### 4.4 Model Kinetika Sistem Fermentasi Etanol dengan Efek Tundaan

**Sumber:** Kasbawati, A.Y. Gunawan, R. Hertadi, K.A. Sidarto, *Effects of Time Delay on the Dynamics of A Kinetic Model of A Microbial Fermentation Process*, ANZIAM J. 55(2014), 336–356, doi:10.1017/S1446181114000194.

**Pendahuluan:** Penelitian mengenai pengembangan sumber energi alternatif menjadi salah satu topik penelitian yang banyak dikaji saat ini dikarenakan kebutuhan manusia akan energi semakin hari semakin meningkat. Bioetanol merupakan salah satu sumber energi alternatif yang banyak dikembangkan karena diproduksi dari biomassa yang terbarukan. Produksi bioetanol meliputi beberapa proses di antaranya proses fermentasi yang merupakan proses transformasi kimia multistap yang terjadi dalam suatu mikroorganisme. Sel ragi *S. cerevisiae* merupakan salah satu mikroorganisme yang banyak digunakan dalam penelitian bioetanol karena memiliki kemampuan fermentasi yang sangat tinggi. Salah satu masalah dalam sistem fermentasi etanol yang memengaruhi efisiensi produksi sel ragi adalah kemungkinan munculnya tundaan dalam proses reaksi sebagai akibat dari karakteristik enzim yang mengkatalis reaksi fermentasi. Beberapa enzim memerlukan aktivasi dari komponen non-protein yang disebut kofaktor yang dibutuhkan untuk aktivitas katalitiknya. Akibatnya beberapa reaksi katalisis dapat tertunda hingga kofaktor atau koenzim telah dipenuhi dalam jumlah yang cukup. Pada penelitian ini, pengaruh tundaan dimodelkan dan parameter yang memengaruhi sistem tundaan tersebut diidentifikasi sehingga dapat dihasilkan sistem fermentasi yang stabil.



**Gambar 4.14** Representasi jalur metabolisme utama sel ragi *S. cerevisiae* [Sumber: artikel penulis].

**Tujuan penelitian:** Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji pengaruh tundaan pada enzim terhadap kondisi stabil dari sistem fermentasi dan mengidentifikasi tundaan kritis dan parameter-parameter yang

memengaruhinya sehingga kemungkinan terjadinya perubahan kestabilan pada solusi kesetimbangan dapat diidentifikasi. Solusi kesetimbangan yang diperoleh akan menunjukkan besar konsentrasi akhir yang akan dicapai oleh sistem pada kondisi terjadi tundaan maupun tidak terjadi tundaan.

**Model Matematika:** Proses fermentasi pada dasarnya merupakan proses transformasi kimia multistap yang terjadi dalam proses metabolisme sel ragi *S. Cerevisiae*. Jalur glikolisis mengawali proses konversi glukosa yang dapat dipandang sebagai suatu proses *lumping* sehingga pengamatan dapat difokuskan pada jalur metabolisme utama sel ragi *S. Cerevisiae* (jalur fermentasi) seperti yang tersaji pada Gambar 4.14. Model matematika yang dibangun untuk merepresentasikan sistem tersebut didasarkan pada asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Model yang dibangun adalah model terstruktur yang meninjau proses metabolisme sel tunggal, pada kondisi anaerobik dengan kondisi fermentasi yang ideal.
2. Laju suplai glukosa diasumsikan konstan persatuan waktu.
3. Reaksi konversi dimodelkan menggunakan kinetika Michaelis-Menten yang dapat menggambarkan secara sederhana hubungan antara laju reaksi dengan metabolit yang menjadi substrat pada reaksi tersebut.
4. Semua reaksi terjadi secara *irreversible* kecuali reaksi keenam.
5. Diasumsikan bahwa reaksi yang mengalami tundaan adalah reaksi yang kedua. Reaksi ini dikatalis oleh enzim *piruvat kinase* yang merupakan salah satu enzim regulasi dalam jalur glikolisis. Enzim tersebut merupakan enzim alosterik yang diaktivasi oleh fructose 1,6- bisphosphate dan diinhibisi oleh ATP sehingga dapat menjadi salah satu *rate-limiting step* dan berpeluang besar mengalami tundaan.

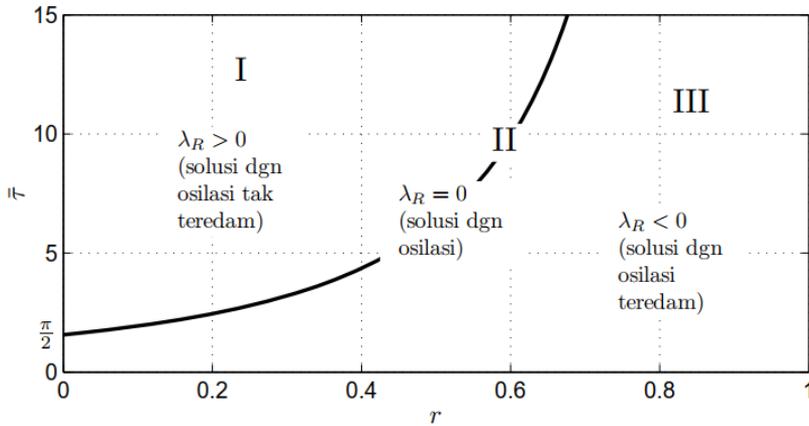
Penerapan hukum aksi massa pada jalur metabolisme dengan waktu tundaan pada reaksi kedua menghasilkan sistem tak berdimensi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1(\tilde{t})}{d\tilde{t}} &= \tilde{S}_g - \frac{\nu_1 x_1(\tilde{t}-1)}{x_1(\tilde{t}-1)+1}, \\
\frac{dx_2(\tilde{t})}{d\tilde{t}} &= \frac{\nu_1 x_1(\tilde{t}-1)}{x_1(\tilde{t}-1)+1} - \frac{\nu_2 x_2(\tilde{t})}{x_2(\tilde{t})+\kappa_2} - \frac{\nu_3 x_2(\tilde{t})}{x_2(\tilde{t})+\kappa_3} - \frac{\nu_4 x_2(\tilde{t})}{x_2(\tilde{t})+\kappa_4}, \\
\frac{dx_3(\tilde{t})}{d\tilde{t}} &= \frac{\nu_2 x_2(\tilde{t})}{x_2(\tilde{t})+\kappa_2} - \sigma_1 x_3(\tilde{t}), \\
\frac{dx_4(\tilde{t})}{d\tilde{t}} &= \frac{\nu_3 x_2(\tilde{t})}{x_2(\tilde{t})+\kappa_3} + \frac{\nu_7 x_6(\tilde{t})}{x_6(\tilde{t})+\kappa_7} - \sigma_2 x_4(\tilde{t}), \\
\frac{dx_5(\tilde{t})}{d\tilde{t}} &= \frac{\nu_4 x_2(\tilde{t})}{x_2(\tilde{t})+\kappa_4} - \frac{\nu_{5f}\kappa_{5b}x_5(\tilde{t}) - \nu_{5b}\kappa_{5f}x_7(\tilde{t})}{\kappa_{5f}\kappa_{5b} + \kappa_{5b}x_5(\tilde{t}) + \kappa_{5f}x_7(\tilde{t})} - \frac{\nu_6 x_5(\tilde{t})}{x_5(\tilde{t})+\kappa_6}, \\
\frac{dx_6(\tilde{t})}{d\tilde{t}} &= \frac{\nu_6 x_5(\tilde{t})}{x_5(\tilde{t})+\kappa_6} - \frac{\nu_7 x_6(\tilde{t})}{x_6(\tilde{t})+\kappa_7} - \sigma_3 x_6(\tilde{t}), \\
\frac{dx_7(\tilde{t})}{d\tilde{t}} &= \frac{\nu_{5f}\kappa_{5b}x_5(\tilde{t}) - \nu_{5b}\kappa_{5f}x_7(\tilde{t})}{\kappa_{5f}\kappa_{5b} + \kappa_{5b}x_5(\tilde{t}) + \kappa_{5f}x_7(\tilde{t})} - \sigma_4 x_7(\tilde{t}),
\end{aligned}$$

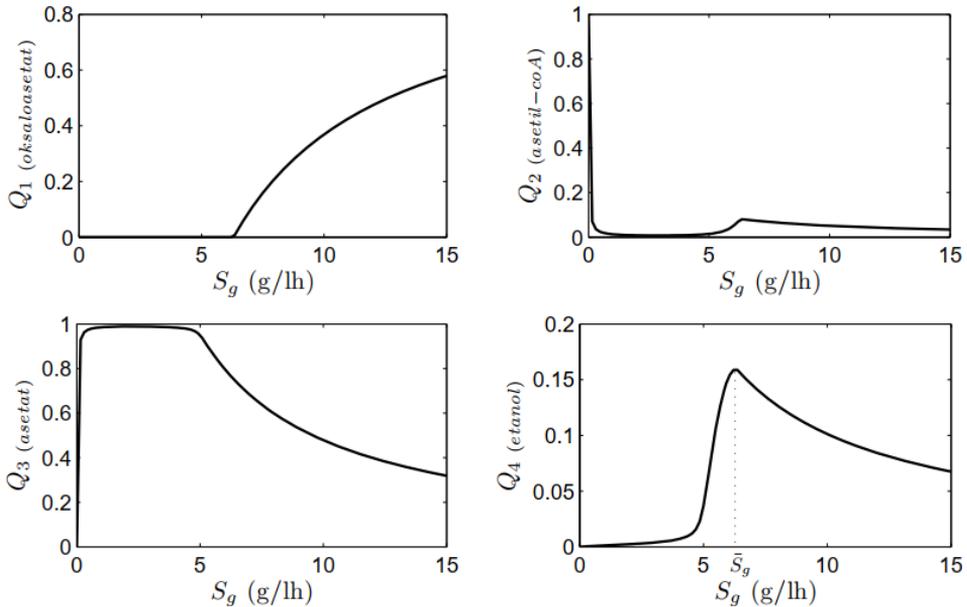
dengan kondisi awal tak berdimensi  $x_i(\tilde{t}) = x_{i0}$ , untuk setiap  $\tilde{t} \in [-1, 0]$ ,  $x_i(0) = x_{i0}$ , untuk setiap  $i > 1$ .

**Metode solusi:** Solusi kesetimbangan sistem diselesaikan untuk menentukan parameter bifurkasi sistem.

**Hasil:** Analisis yang dilakukan terhadap model di atas menghasilkan suatu tundaan kritis yang bergantung pada parameter kinetik enzim *piruvat kinase* dan laju suplai glukosa. Tundaan kritis tersebut merupakan parameter bifurkasi yang mengakibatkan munculnya bifurkasi Hopf pada sistem (Gambar 4.15). Selanjutnya, pada Gambar 4.16 disajikan hasil simulasi yang menunjukkan hubungan antara rasio setimbang laju konsentrasi produk fermentasi terhadap laju suplai glukosa yang diberikan di dalam sistem fermentasi. Diperoleh bahwa terdapat laju suplai glukosa tertentu yang menyebabkan produksi etanol mencapai produksi yang maksimum. Fenomena ini teramati pula secara eksperimen oleh dan (Scheffers dkk., 1989) dan (Lei dkk,2001).



**Gambar 4.15** Kurva bifurkasi dari tundaan kritis  $\bar{\tau}$  terhadap parameter  $r$  (rasio laju suplai glukosa terhadap laju reaksi maksimum dari enzim *piruvat kinase*), untuk  $\lambda_1 = \pi/2$  [Sumber: artikel penulis].



**Gambar 4.16** Diagram rasio laju setimbang produk metabolisme sebagai fungsi dari laju suplai glukosa [Sumber: artikel penulis].

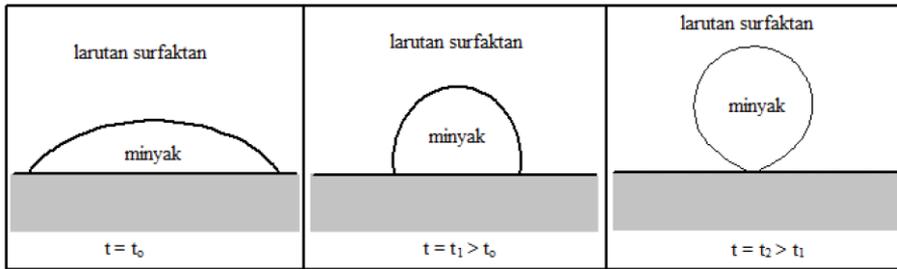
**Kesimpulan:** Model yang dibangun digunakan untuk mengamati dinamika sesaat dari sistem metabolisme yang dikaji. Efek tundaan muncul sebagai akibat dari karakteristik enzim yang aktivitasnya dipengaruhi oleh perubahan konformasi dari struktur enzim selama proses konversi berlangsung. Waktu yang dibutuhkan oleh enzim untuk mengonversi substrat

menjadi produk dan mengembalikan strukturnya ke bentuk semula, dipandang sebagai waktu tunda dalam proses metabolisme. Secara analitik diperoleh bentuk tundaan kritis yang bergantung pada parameter operasional dari reaksi kedua, yaitu parameter kinetika dari enzim *piruvat kinase* dan laju suplai glukosa. Parameter kritis tersebut dapat dipandang sebagai titik bifurkasi Hopf yang mengakibatkan munculnya perilaku osilasi dari sistem di sekitar solusi kesetimbangan yang positif. Eksistensi dari tundaan dalam proses konversi mengakibatkan perubahan pada dinamika sistem metabolisme. Terdapat tiga daerah parameter yang memberikan perilaku dinamika sistem yang berbeda-beda, yaitu solusi dengan osilasi yang tak teredam, solusi dengan osilasi yang teredam, atau solusi sistem yang tanpa osilasi. Observasi numerik menunjukkan bahwa untuk nilai kinetika enzim yang tetap, terdapat nilai suplai glukosa yang menghasilkan reaksi fermentasi yang stabil. Terdapat pula suplai glukosa tertentu yang menyebabkan konsentrasi etanol mencapai konsentrasi yang maksimum dan minimum. Oleh karena itu, pemilihan besar laju suplai glukosa yang tepat diperlukan agar diperoleh hasil produksi etanol yang optimal.

#### **4.5 Model Matematika Pengaruh Surfaktan Tak Larut Terhadap Pergerakan Garis Kontak Bulir Minyak**

**Sumber:** K. Yulianti, A.Y. Gunawan, E. Soewono, and L. Mucharam, *Effect of an Insoluble Surfactant on the Moving Contact-Line of an Immersed Sessile Oil Drop*, International Journal of Applied Mathematics and Statistics 53 (6) (2015),

**Pendahuluan:** Terdapat beberapa hasil eksperimen yang menunjukkan bahwa surfaktan (*surface active agent*) dapat mengubah sifat kebasahan dari sebuah bulir terhadap suatu permukaan padat, antara lain oleh (Kralchevsky dkk., 2005), (Chang dkk., 2007), dan (Zhang dkk., 2006). Sifat surfaktan ini dimanfaatkan dalam bidang produksi minyak bumi di mana surfaktan berperan mempercepat proses pelepasan bulir minyak dari permukaan batuan. Surfaktan mengubah sifat kebasahan permukaan *calcite*, dari *intermediate-wet* menjadi lebih *water-wet*, sehingga minyak dapat lebih mudah terlepas dari permukaan batuan dan mengalir ke sumur produksi. Ilustrasi hasil eksperimen tentang pengaruh surfaktan terhadap perubahan bentuk minyak di atas sebuah permukaan terdapat pada Gambar 4.17.



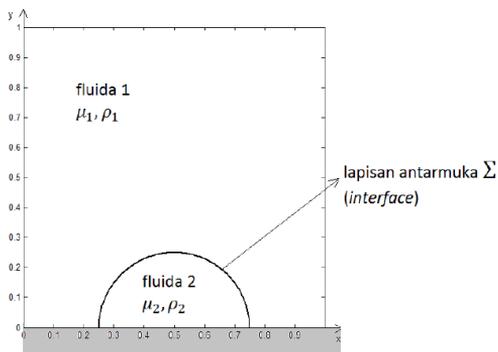
**Gambar 4.17** Ilustrasi hasil eksperimen Kralchevsky (2005) tentang pelepasan bulir minyak secara spontan dari sebuah permukaan padat di dalam larutan surfaktan [Sumber: artikel penulis].

Minyak yang menempel di atas permukaan padat datar selanjutnya kita sebut sebagai bulir. Perubahan bentuk bulir tersebut dapat diindikasikan oleh perubahan nilai sudut kontak antara bulir dan permukaan padat dan posisi garis kontak antara bulir dan permukaan padat. Simulasi numerik untuk pergerakan bulir di atas sebuah permukaan padat telah dikaji oleh beberapa peneliti sebelumnya, antara lain: (Sprittless, 2010) menggunakan Metode Elemen Hingga, (Renardy dkk., 2001) dan (Afkhami dan Kondic., 2014) memanfaatkan metode *volume of fluid*, (Li dkk., 2010) menggunakan Metode *the augmented immersed interface*, (Liu dkk., 2011) menggunakan Metode *Level Set*, dan (Svadlenka dan Omata, 2008) mengusulkan Metode *the discrete morse flow*. Namun, pada penelitian-penelitian tersebut tidak melibatkan parameter surfaktan. Sepanjang pengetahuan penulis, keterlibatan surfaktan pada masalah tersebut masih terbatas. Pearson (2009) menyajikan sebuah model untuk masalah pergerakan titik kontak sebuah fluida Newton di dalam larutan surfaktan. Pada model yang diturunkannya, diambil sebuah contoh untuk menunjukkan bahwa pada model yang diturunkannya bersifat *well-posed* secara matematis. Dengan metode *immersed boundary*, (Lai dkk., 2010) menyimulasikan pengaruh surfaktan terhadap pergerakan titik kontak dari sebuah bulir di atas permukaan padat. Bulir cairan berada di dalam fluida lain, di mana massa jenis dan kekentalan kedua fluida tersebut sama. Berdasarkan hasil numerik, mereka menyimpulkan bahwa surfaktan memiliki dampak yang signifikan terhadap penyebaran dan kontraksi dari bulir, yaitu untuk bulir yang bersifat *wetting* (sudut kontaknya lebih dari  $90^\circ$ ), keberadaan surfaktan membuat bulir tersebut menjadi lebih bersifat *wetting*. Sebaliknya, untuk bulir yang bersifat *nonwetting* (sudut kontaknya kurang dari  $90^\circ$ ), surfaktan menyebabkan bulir menjadi lebih bersifat *nonwetting*.

**Tujuan penelitian:** Pada penelitian ini dikonstruksi model matematika dan mensimulasikan secara numerik pengaruh surfaktan terhadap pergerakan garis kontak dari bulir minyak yang menempel di sebuah permukaan. Melalui penelitian ini akan diselidiki pula bagaimana dampak sifat permukaan terhadap pergerakan garis kontak tersebut.

**Model Matematika:** Keadaan dua buah fluida Newton yang tidak bercampur direpresentasikan pada sebuah domain terbatas  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ . Sebuah bulir minyak (fluida 2) menempel di atas sebuah permukaan datar yang terbenam dalam larutan surfaktan (fluida 1). Kedua buah fluida terpisah oleh sebuah lapisan antarmuka (*interface*)  $\Sigma$ , lapisan antarmuka ini merupakan tempat terakumulasinya surfaktan. Ilustrasi terdapat pada Gambar 4.18 Model matematika yang disajikan pada subbab ini berdasarkan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Kedua fluida adalah fluida Newton kental (*Newtonian viscous fluid*).
2. Pergerakan fluida simetri terhadap garis vertikal pada tengah domain.
3. Surfaktan bersifat tidak larut dan berdistribusi pada lapisan antarmuka secara konveksi.
4. Konsentrasi surfaktan cukup kecil dan hanya memengaruhi nilai tegangan antarmuka, tanpa efek dinamika reologi yang lebih kompleks.



**Gambar 4.18** Sketsa bulir minyak yang menempel di atas sebuah permukaan padat [Sumber: artikel penulis].

Dinamika fluida sistem di atas dapat dirumuskan oleh persamaan Navier-Stokes untuk dua fasa dan persamaan kontinuitas, yaitu:

$$\rho_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \rho_i (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i = -\nabla p_i + \rho_i \mathbf{g} + \mu_i \nabla^2 \mathbf{u}_i + \mathbf{f},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

di mana  $t$  adalah waktu,  $\rho$  adalah massa jenis dari fluida,  $\mu$  adalah kekentalan fluida,  $p(\mathbf{x}, t)$  adalah tekanan,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  adalah medan kecepatan,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  adalah gaya gravitasi, dan  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  adalah gaya yang bekerja pada fluida yang disebabkan oleh gaya antarmuka (*the interfacial force*)  $\mathbf{F}$ . Indeks  $i = 1$  adalah untuk fluida luar bulir, sedangkan  $i = 2$  adalah untuk bulir. Lapisan antarmuka yang dinotasikan dengan  $\Sigma$ , diparameterisasi oleh  $X(s, t)$ ,  $0 \leq s \leq L_b$ , di mana  $L_b$  adalah nilai ujung kanan interval domain  $s$ . Berdasarkan (Lai dkk.,2010), gaya antarmuka  $\mathbf{F}$  dinyatakan dengan:

$$\mathbf{F}(s, t) = \frac{\partial(\sigma(s,t)\boldsymbol{\tau}(s,t))}{\partial s},$$

di mana  $\sigma$  adalah tegangan antarmuka, dan  $\boldsymbol{\tau}$  adalah vektor singgung satuan terhadap lapisan antarmuka, yang didefinisikan:  $\boldsymbol{\tau}(s, t) = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}}{|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}|}$ .

Hubungan antara  $\mathbf{F}$  dan  $\mathbf{f}$  adalah  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Sigma} \mathbf{F}(s, t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s))ds$ , di mana  $\delta$  adalah fungsi *delta dirac* (Lai dkk., 2010). Persamaan tersebut menyatakan bahwa gaya  $\mathbf{f}$  bernilai tidak nol hanya pada lapisan antarmuka (de Jesus dkk., 2015). Karena lapisan antarmuka bergerak sesuai dengan aliran fluida, maka:

$$\frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial t} = \mathbf{U}(s, t) = \int_{\Sigma} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s))d\mathbf{x}.$$

Adapun hubungan antara nilai tegangan antarmuka ( $\sigma$ ) dan konsentrasi surfaktan ( $\Gamma$ ) dapat dinyatakan dengan persamaan Langmuir nonlinear, yang dalam bentuk sederhana dapat dituliskan dalam bentuk (Rosen, 2004):

$$\sigma(\Gamma) = \sigma_c(1 + \ln(1 - E\Gamma)),$$

di mana  $\sigma_c$  adalah nilai tegangan antarmuka ketika tidak ada surfaktan, dan  $E$  adalah sensitifitas perubahan tegangan antarmuka yang diakibatkan oleh keberadaan surfaktan. Selanjutnya, surfaktan yang berada di lapisan antaramuka  $\Sigma$  bergerak memenuhi persamaan:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + (\nabla_s \cdot \mathbf{u})\Gamma = 0,$$

di mana adalah  $\nabla_s$  gradien permukaan.

Mengenai kondisi batas, di sekitar  $y = 0$ , kami mengasumsikan bahwa kecepatan horisontal mendominasi, dengan selisih antara kecepatan

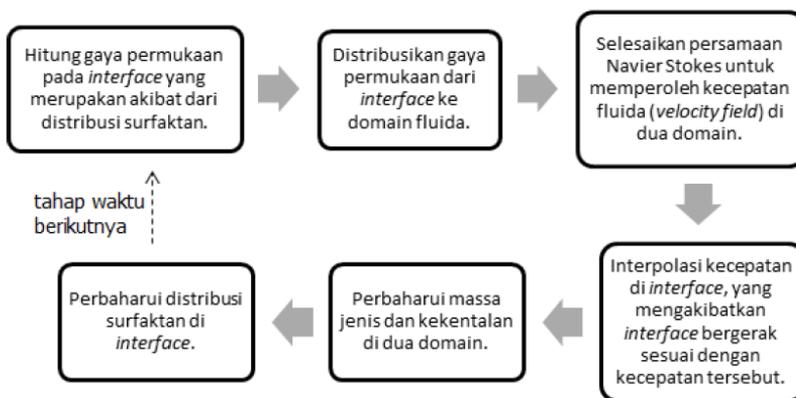
horizontal di dinding dan di sekitar dinding adalah sebanding dengan laju geser (*shear rate*). Sehingga kondisi batas pada  $y = 0$  adalah:

$$v = 0,$$

$$u_* - u = \kappa \frac{\partial u}{\partial y}, i = 1, 2,$$

di mana  $u_*$  adalah kecepatan horizontal di sekitar  $y = 0$ , dan parameter  $\kappa$  berperan sebagai koefisien friksi. Untuk batas lainnya, yaitu  $y = 1, x = 0$ , dan  $x = 1$ , diasumsikan bahwa kecepatan vertikal dan kecepatan horizontal pada garis-garis tersebut adalah nol.

**Metode solusi:** Metode Front Tracking (Lai dkk., 2009) digunakan untuk menyelesaikan persamaan Navier-Stokes dua fasa secara numerik. Algoritma penyelesaian dinamika fluida dua fasa yang memuat surfaktan terdapat pada Gambar 4.19.



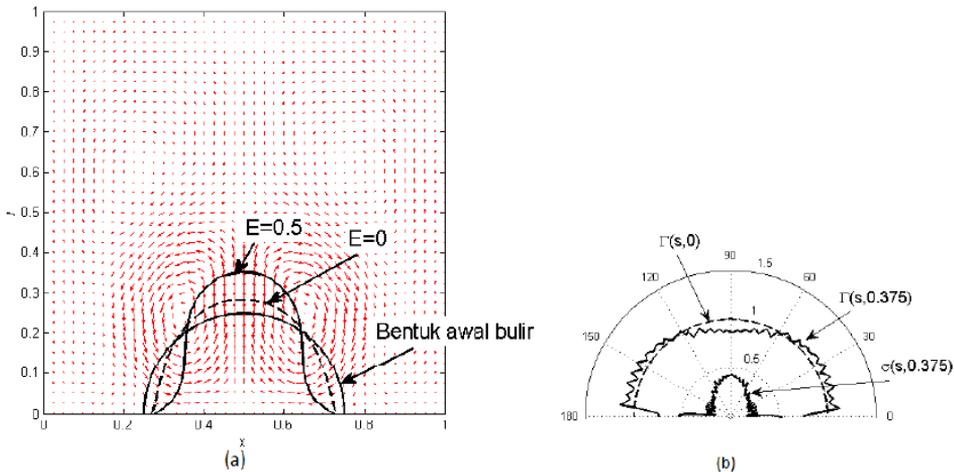
**Gambar 4.19** Bagan alur penyelesaian.

**Hasil:** Pada bagian ini ditampilkan beberapa hasil simulasi numerik. Untuk melihat pengaruh surfaktan terhadap pergerakan garis kontak dari bulir minyak, kami membandingkan pergerakan garis kontak tersebut ketika memuat surfaktan dan tanpa surfaktan. Pada simulasi penelitian ini, untuk merepresentasikan sifat minyak dan larutan surfaktan, kami berikan nilai massa jenis untuk fluida 2 lebih rendah dari massa jenis fluida 1 ( $\rho_2 = 0.8; \rho_1 = 1$ ). Sehingga dikarenakan oleh pengaruh gravitasi, fluida 2 mempunyai kecenderungan untuk bergerak ke atas. Sedangkan nilai parameter-parameter yang lain, kami gunakan  $\mu_1 = 0.1; \mu_2 = 0.1$ ; dan  $g_y = 100$ . Sebagai nilai awal, diasumsikan bahwa surfaktan terdistribusi secara merata di

permukaan bulir, yaitu  $\Gamma(s, 0)=1$ , dan kecepatan fluida bernilai nol di seluruh domain.

**a. Kasus dinding yang berkoefisien friksi besar**

Untuk memodelkan sifat permukaan dengan koefisien friksi besar, parameter  $\kappa$  dipilih sedemikian sehingga kecepatan horisontal di atas permukaan datar tersebut hampir nol, yaitu:  $\kappa = \frac{u_*}{\Delta u / \Delta y}$ .



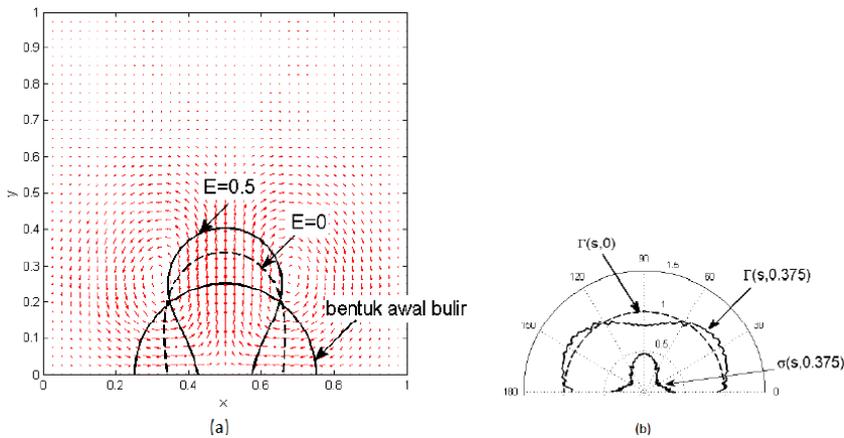
**Gambar 4.20** (a) Perbandingan perubahan bentuk bulir antara yang mengandung dan tidak mengandung surfaktan pada dinding yang berkoefisien friksi besar. (b) Distribusi konsentrasi surfaktan dan nilai tegangan permukaan [Sumber: artikel penulis].

Gambar 4.20 (a) menunjukkan perbandingan perubahan bentuk bulir antara yang memuat ( $E = 0,5$ ) dan tidak memuat surfaktan ( $E = 0$ ) pada  $t = 0.375$  satuan waktu. Vektor-vektor pada gambar tersebut adalah arah dan nilai kecepatan fluida. Karena massa jenis dari fluida 2 (minyak) lebih rendah dari fluida di sekitarnya (fluida 1), maka fluida 2 mempunyai kecenderungan bergerak ke atas, baik untuk ada dan tidak ada surfaktan. Keberadaan surfaktan menyebabkan turunnya nilai tegangan antarmuka. Hal tersebut mengakibatkan fluida 2 lebih mudah berdeformasi mengikuti arah aliran fluida. Berdasarkan gambar tersebut, fluida luar bulir di sekitar area bawah bergerak ke arah dalam dan fluida di sekitar puncak bulir bergerak ke arah atas. Akibatnya, pada akhir pengamatan simulasi, konsentrasi surfaktan di sekitar puncak bulir berkurang dan berakumulasi di daerah bawah bulir (lihat Gambar 4.20(b)). Hal ini menyebabkan penciutan pada daerah bawah dari bulir yang memuat surfaktan. Pada saat yang sama, posisi puncak bulir yang

memuat surfaktan lebih tinggi dari pada bulir yang tidak memuat surfaktan. Di sisi lain, dikarenakan oleh tingginya koefisien friksi dari dinding maka titik kontak bulir tidak mengalami banyak pergerakan, baik untuk kasus memuat ataupun tidak memuat surfaktan. Untuk sifat permukaan padat seperti ini, surfaktan tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap proses pelepasan bulir minyak dari permukaan padat. Dengan kata lain, bulir minyak tetap sulit untuk terlepas dari permukaan padat, baik dengan atau tanpa kehadiran surfaktan.

**b. Kasus dinding yang berkoefisien friksi kecil**

Untuk menggambarkan kondisi permukaan datar yang berkoefisien friksi kecil, pada simulasi ini kami gunakan nilai  $\kappa = 0.5 \Delta y$ . Adapun parameter-parameter yang lain, nilainya dibuat tetap seperti pada simulasi kasus permukaan padat berkoefisien friksi besar.



**Gambar 4.21** (a) Perbandingan perubahan bentuk bulir antara yang mengandung dan tidak mengandung surfaktan pada dinding yang berkoefisien friksi kecil. (b) Distribusi konsentrasi surfaktan dan nilai tegangan permukaan [Sumber: artikel penulis].

Gambar 4.21 (a) menunjukkan perbandingan bentuk minyak di atas permukaan berfriksi kecil, antara yang memuat ( $E = 0.5$ ) dan tidak memuat surfaktan ( $E = 0$ ) pada  $t = 0.375$  satuan waktu. Serupa dengan kasus untuk dinding berkoefisien friksi besar, bulir bergerak ke arah atas, baik untuk bulir yang memuat atau tidak memuat surfaktan. Akan tetapi, berkurangnya nilai tegangan antarmuka menyebabkan bulir yang memuat surfaktan lebih berdeformasi dari pada bulir yang tidak memuat surfaktan. Sehingga titik kontak dari bulir yang memuat surfaktan bergerak lebih cepat dari pada titik kontak bulir yang tidak memuat surfaktan. Akibatnya, bulir yang memuat

surfaktan akan lebih cepat terlepas dari permukaan padat. Hal ini bersesuaian dengan hasil eksperimen (Kralchevsky dkk., 2005), yang menyatakan bahwa surfaktan dapat mempercepat pelepasan minyak dari sebuah permukaan padat.

### c. Validasi Simulasi Numerik

Sebuah sifat penting yang mencerminkan keakurasian simulasi kami adalah sifat kekekalan massa, baik untuk bulir ataupun untuk konsentrasi surfaktan. Untuk menjustifikasi sifat ini, pada pada Tabel 4.1 kami sajikan perubahan luas daerah bulir dan jumlah konsentrasi surfaktan. Nilai  $A_{ref}$  Aref dan  $\Gamma_{ref}$  yang digunakan adalah luas awal dan jumlah konsentrasi surfaktan awal, yaitu  $0.5\pi R^2$  dan  $\pi$ , berturut-turut. Berdasarkan tabel tersebut, dapat kita lihat bahwa prinsip kekekalan massa baik untuk bulir maupun untuk total konsentrasi surfaktan terpenuhi. Hasil ini menunjukkan bahwa skema numerik yang kami bangun cukup akurat.

**Tabel 4.1** Perubahan luas daerah bulir dan total konsentrasi surfaktan.

Koefisien Friksi	Surfaktan	$ A - A_{ref} $	Galat (%)	$ \Gamma - \Gamma_{ref} $	Galat (%)
Besar	Ada ( $E = 0.6$ )	$1.33 \times 10^{-4}$	0.135	$4.44 \times 10^{-16}$	$1.41 \times 10^{-14}$
	Tidak ada ( $E = 0$ )	$1.76 \times 10^{-5}$	0.018	—	—
Kecil	Ada ( $E = 0.5$ )	$2.77 \times 10^{-4}$	0.283	$4.44 \times 10^{-16}$	$1.41 \times 10^{-14}$
	Tidak ada ( $E = 0$ )	$1.90 \times 10^{-4}$	0.194	—	—

**Kesimpulan:** Makalah ini menyajikan model dan eksplorasi numerik pengaruh surfaktan tidak larut pada pergerakan bulir minyak pada permukaan padat, terutama pada proses pelepasan. Untuk evolusi surfaktan pada antarmuka yang bergerak, kami mengusulkan sebuah metode sederhana sehingga memenuhi kekekalan massa untuk surfaktan. Dari simulasi, kami menemukan bahwa gaya apung menyebabkan bulir minyak bergerak naik dari permukaan padat. Kami menyimula sikan dua kasus yang berbeda untuk membedakan karakteristik dari permukaan padat, yaitu koefisien friksi yang besar dan kecil. Dalam kasus permukaan dengan koefisien friksi tinggi, garis kontak tidak bergerak. Jadi, surfaktan hampir tidak memengaruhi pergerakan garis kontak; tetapi hanya memengaruhi bentuk bulir saja. Sedangkan dalam kasus koefisien friksi kecil, kami menemukan bahwa kehadiran surfaktan pada antarmuka mempunyai efek mempercepat

pelepasan bulir minyak. Hal ini bersesuaian dengan hasil penelitian (Kralchevsky dkk., 2005).

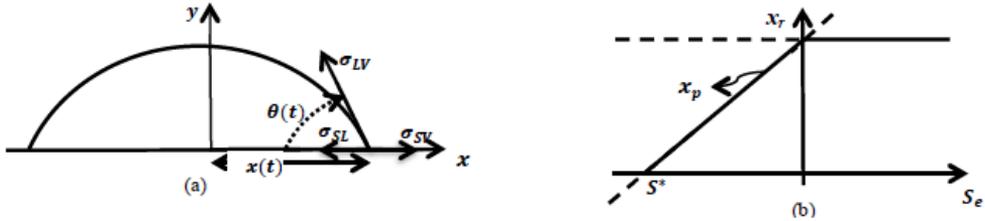
#### 4.6 Model Matematika Pengaruh Surfaktan Terhadap Pergerakan Bulir Cairan di Atas Permukaan Padat

**Sumber:** K. Yulianti, A.Y. Gunawan, E. Soewono, and L. Mucharam, *A new approach for modeling of the surfactant effect on a sessile oil drop motion*, AIP Conference Proceedings **1677**, 030009 (2015); doi: 10.1063/1.4930631.

**Pendahuluan:** Penelitian ini dilatarbelakangi oleh beberapa fakta dalam industri perminyakan, bahwa surfaktan dapat meningkatkan produksi minyak dengan mengurangi tegangan antarmuka antara minyak dan air (Leal, 2007), dan / atau mengubah sifat kebasahan (*wettability*) batuan menjadi lebih basah-air (*water-wet*) (Zhang, dkk., 2006). Model matematika yang bersifat analitik yang mengkaji perubahan bentuk *sessile-drop*, sepengetahuan kami, masih terbatas. Berdasarkan pendekatan mekanistik, persamaan Navier-Stokes bersama dengan kondisi batas yang tepat yang dapat digunakan sebagai model untuk masalah tersebut bersifat non-linier. Hal ini tidaklah mudah dicari solusinya, kecuali jika ditambahkan lebih banyak batasan atau asumsi. Pearson (2009) mengonstruksi model kontinum sederhana untuk pergerakan garis kontak dari fluida Newton dalam larutan surfaktan, dan menyajikan contoh untuk menunjukkan bahwa model yang dibangun adalah *well-posed* secara matematis. (Shikhmurzaev, 2008) menganalisis beberapa teori yang dapat digunakan untuk menghasilkan solusi model matematika dari permasalahan pergerakan garis kontak dari bulir minyak, kemudian membandingkannya dengan beberapa hasil eksperimen. (Svadlenka dan Omata, 2008) menerapkan metode variasional untuk mengembangkan model gerakan bulir minyak di atas permukaan, tanpa melibatkan surfaktan.

**Tujuan Penelitian:** Pada penelitian ini, kami membangun model matematika untuk pergerakan garis kontak dalam bentuk persamaan diferensial orde dua dan mengusulkan cara alternatif secara matematis untuk mengkaji perubahan bentuk bulir minyak (cairan 1) yang menempel pada permukaan padat (*sessile oil-drop*) yang direndam dalam larutan surfaktan (cairan 2) (lihat Gambar 4.22 (a)). Model yang dibangun didasarkan pada kesetimbangan gaya pada garis kontak. Gaya yang bekerja pada garis kontak terdiri atas gaya gesekan dan keseimbangan gaya mekanik dari tiga tegangan

permukaan, yaitu padat-cairan 1, cairan 1 - cairan 2, dan cairan 2 - padat. Surfaktan yang terdapat pada cairan 2 berperan mengurangi nilai tegangan permukaan yang berdampak pada perubahan gerakan garis kontak. Kemudian, kami menentukan bentuk bulir berdasarkan prinsip minimalisasi energi yang dibatasi oleh luas daerah penampang bulir. Model ini diusulkan sebagai pendekatan baru untuk memodelkan pergerakan garis kontak dari bulir.



**Gambar 4.22** (a) Sketsa bulir di atas permukaan padat (b) Hubungan antara koefisien penyebaran  $S_e$  dan nilai  $x_e$  [Sumber: artikel penulis].

**Model Matematika:** Hasil penelitian (de Gennes dkk., 2004) dan (Bonn dkk., 2009) menunjukkan bahwa ketika sebuah bulir ditempatkan di atas sebuah permukaan padat, terdapat dua kemungkinan perubahan kebasahan (*dynamics of wetting*), yaitu menyebar secara total (*total wetting*) atau membentuk sebuah tutup bulat di atas permukaan padat dengan sudut kontak yang setimbang  $\theta_e$  (*partial wetting*). Kemungkinan-kemungkinan tersebut bergantung pada parameter penyebaran  $S_e$  yang didefinisikan:

$$S_e = \sigma_{SV} - (\sigma_{SL} + \sigma_{LV}) \quad (4.6.1)$$

di mana  $\sigma$  merupakan notasi dari tegangan permukaan, dan indeks *SV*, *SL*, *LV* merupakan singkatan dari *solid-vapor* (padat-udara), *solid-liquid* (padat-cairan), dan *liquid-vapor* (cairan-udara). Selanjutnya, Persamaan Young's menyatakan bahwa:

$$\sigma_{SV} = \sigma_{SL} + \sigma_{LV} \cos \theta_e. \quad (4.6.2)$$

Berdasarkan Persamaan (4.6.1) dan (4.6.2), jika parameter  $S_e = 0$ , maka sudut kontak setimbang  $\theta_e$  bernilai nol, yang berarti cairan menyebar secara total, sedangkan jika  $S_e < 0$  berarti bulir cairan membasahi sebagian permukaan padat (*partial wetting*).

Untuk mengidentifikasi pergerakan bulir di atas permukaan padat, diasumsikan bentuk bulir simetri terhadap sumbu-y, dan misalkan  $x(t)$  adalah notasi untuk posisi dari garis kontak (bergantung pada waktu  $t$ ), yang diukur dari sumbu-y. Ilustrasi terdapat pada Gambar 4.22 (a). Ketika dicapai kesetimbangan gaya, pergerakan bulir mencapai keadaan setimbang pula (*steady condition*), yang mana garis kontak berada pada posisi titik setimbang  $x_e$ . Hal ini berarti, untuk bulir yang *partial wetting* maka nilai titik  $x_e$  akan terbatas, dan sebaliknya, jika bulir menyebar secara total, maka nilai titik  $x_e$  akan menuju tak hingga. Untuk menggambarkan keadaan bulir minyak dalam larutan surfaktan (*liquid-liquid system*), diasumsikan bulir membasahi sebagian permukaan padat (*partial wetting*). Oleh karena itu, nilai  $x_e$  adalah terbatas.

Terdapat tiga kemungkinan untuk nilai  $x_e$  yang bergantung pada nilai  $S_e$  (lihat Gambar 4.22(b)). Untuk suatu nilai  $S^*$ , jika  $S_e < S^*$  maka bulir sama sekali tidak membasahi (*totally non-wetting*). Jika  $S^* < S_e < 0$ , maka nilai  $x_e$  merupakan fungsi linier dari  $S_e$ . Dalam kasus ini, dinotasikan dengan  $x_e = x_p$ . Sedangkan, jika  $S_e \geq 0$  maka bulir membasahi sebagian permukaan padat dengan nilai  $x_e$  mencapai maksimum pada  $x_r$ . Oleh karena itu, kami merumuskan dinamika untuk posisi garis kontak dengan persamaan:

$$\ddot{x} = \underbrace{\left(\frac{\sigma_{LV}\omega}{\mu} \sin(\omega x + C) - \alpha\right)}_I \dot{x} + \underbrace{(\beta S_e + \gamma(x_r - x))}_{II} (x_r - x) x. \quad (4.6.3)$$

Persamaan (4.6.3) menyatakan bahwa gaya yang bekerja pada pergerakan garis kontak terdiri atas gaya hambat (tanda kurung I) dan gaya mekanis dari garis kontak tiga fasa (tanda kurung II). Secara lebih spesifik, unsur-unsur untuk gaya hambat yaitu:

- a. Karakteristik dari bulir: tegangan antarmuka ( $\sigma_{LV}$ ), kekentalan bulir ( $\mu$ ), dan sebuah konstanta yang menghubungkan perubahan sudut kontak dan posisi garis kontak ( $\omega$ ), yang direpresentasikan pada orde terendahnya dengan  $\ddot{\theta} \approx -\omega \dot{x}$ . Parameter  $C$  adalah konstanta positif yang berelasi dengan awal dari bulir.
- b. Karakteristik permukaan padat yang diasumsikan sebanding (dinyatakan parameter  $\alpha$ ) dengan kecepatan garis kontak ((Shikmurzaev, 2008); de Gennes dkk., 2004)).

Untuk gaya mekanis dari garis kontak tiga fasa, kami melibatkan koefisien penyebaran ( $S_e$ ), koefisien hambat ( $\beta$ ) dan sebuah parameter yang mewakili kekentalan dari cairan sekitar ( $\gamma$ ).

Surfaktan yang larut dalam cairan di sekitarnya akan menurunkan nilai tegangan antarmuka  $\sigma_{SV}$  dan  $\sigma_{LV}$ . Berdasarkan (Leal, 2007) dan (Rosen, 2004), diasumsikan nilai tegangan antarmuka menurun secara linier, yaitu:

$$\sigma_i = \sigma_i^0 - E_i \Gamma, \quad (4.6.4)$$

di mana  $\sigma_i^0$  adalah notasi dari tegangan antarmuka ketika tidak ada surfaktan,  $\Gamma$  adalah konsentrasi surfaktan, dan  $E$  merupakan sebuah parameter yang mengukur tingkat penurunan tegangan antarmuka karena keberadaan surfaktan,  $i = LV, SV$ .

Persamaan (4.6.3)-(4.6.4) ditransformasi ke dalam bentuk tidak berdimensi dengan penskalaan  $x = Ax^*$ ,  $t = Tt^*$ ,  $\sigma = \sigma_{SV}^0 \sigma^*$ ,  $S_e = S_{SV}^0 S$ ,  $\Gamma = \Gamma_0 \Gamma^*$ , di mana  $A$  adalah notasi dari jari-jari bentuk bulir awal,  $\Gamma_0$  adalah konsentrasi awal surfaktan, dan  $T = \sqrt{1/A\beta}$ . Persamaan (4.6.3) dalam bentuk tidak berdimensi dan mengabaikan tanda bintang dapat ditulis sebagai berikut:

$$\ddot{x} = (K_1 \sin(\omega x + C) - K_2) \dot{x} + (S + K_3(x_a - x))(x_a - x) x \quad (4.6.5)$$

dengan  $K_1 = \frac{\sigma_{LV} \omega T}{\mu}$ ,  $K_2 = \alpha T$ ,  $K_3 = \frac{A\gamma}{\beta}$ ,  $x_a = \frac{x_r}{A}$ . Mensubstitusikan Persamaan (4.6.4) ke (4.6.1), maka koefisien penyebaran  $S$  merupakan fungsi dari surfaktan yang dinyatakan dengan:

$$S = 1 - \left( \frac{\sigma_{SL}^0}{\sigma_{SV}^0} + \frac{\sigma_{LV}^0}{\sigma_{SV}^0} \right) - \Delta \lambda \Gamma, \quad (4.6.6)$$

dengan  $\Delta \lambda = \frac{(E_{SV} - E_{LV}) \Gamma_0}{\sigma_{SV}^0}$ . Berdasarkan hasil eksperimen (Kralchevsky, 2005), faktor yang berperan dalam perubahan sifat kebasahan permukaan padat adalah penetrasi atau difusi dari molekul air dari air-surfaktant terhadap *substrate*. Oleh karena itu, kami tentukan  $E_{SV} > E_{LV}$ , yang mana keberadaan *surfactant* mengurangi nilai  $S$ .

**Metode solusi:** Terlebih dahulu akan diselidiki kestabilan linier titik kesetimbangan Persamaan (4.6.5). Hal ini diperlukan untuk menjelaskan bahwa model yang dibangun mengindikasikan keterbatasan dinamik dari

sudut kontak (model cukup representatif). Selanjutnya, akan dibangun model bentuk bulir melalui pendekatan kalkulus variasi dan kemudian diselesaikan secara numerik.

*Analisis Kestabilan.* Titik kestabilan  $x_e$  dari Persamaan (4.6.5) adalah  $(0, 0)$ ,  $(x_a, 0)$ ,  $(x_p, 0)$ , di mana  $x_p = \frac{S}{K_3} + x_a$ . Menggunakan pendekatan analisa kestabilan linier, titik  $x_e$  adalah stabil jika  $(K_1 \sin(\omega x_e + C) - K_2) < 0$ . Secara lebih spesifik:

- $x_e = (0, 0)$  adalah stabil jika  $S < -x_a K_3 < 0$ .
- $x_e = (x_p, 0)$  adalah stabil jika  $-x_a K_3 < S \leq 0$ .
- $x_e = (x_a, 0)$  adalah stabil jika  $S > 0$ .

Kondisi-kondisi tersebut mengindikasikan bahwa pergerakan sudut kontak tidak akan mencapai nilai tak hingga jika hambatan dari permukaan padat lebih besar dari gaya yang dihasilkan dari karakteristik bulir. Titik setimbang  $x_e$  secara signifikan ditentukan oleh koefisien penyebaran  $S_e$  yang ditunjukkan pada Gambar 4.22 (b).

*Bentuk Bulir.* Berdasarkan Persamaan (4.6.5), dapat diketahui posisi dari garis kontak untuk setiap waktu  $t$ . Untuk menentukan bentuk dari bulir cairan, digunakan prinsip meminimumkan energi permukaan dari sebuah bulir. Dalam kasus ini diasumsikan bulir mempunyai volume tertentu, yang jika digambarkan pada dua-dimensi menjadi luas penampang tertentu. Untuk memfasilitasi kasus sudut kontak ( $\theta$ ) lebih dari  $90^\circ$ , berbeda dengan hasil penelitian (Svadlenka dan Omata, 2008), kami menggunakan sistem koordinat polar  $(r, \theta)$ . Sehingga bentuk bulir merupakan solusi dari fungsional berikut:

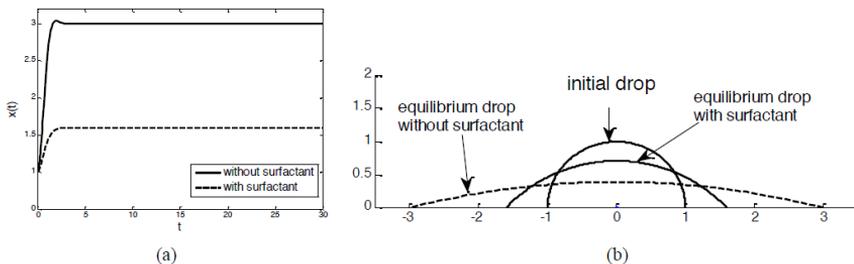
$$L(r, t) = \int_0^{x(t)} \left( \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right)^{1/2} + \frac{\zeta}{2} r^2 d\theta, \quad (4.6.7)$$

di mana  $\zeta$  merupakan pengali Lagrange,  $x(t)$  adalah penyelesaian dari Persamaan (5), dan luas penampang bulir dinyatakan dengan:  $\frac{1}{2} \int_0^{x(t)} r^2 d\theta = V > 0$ .

**Hasil:** Pada bagian ini ditampilkan hasil simulasi numerik. Perbandingan dinamika  $x(t)$  untuk bulir tanpa surfaktan (garis penuh) dan bulir dengan memuat surfaktan (garis putus) disajikan pada Gambar 4.23(a). Pada simulasi ini digunakan parameter  $K_1 = 0.1, K_2 = 4.6, K_3 = 0.5, \omega = 1, C = \frac{\pi}{6}$ , dan  $x_a = 10$ . Untuk simulasi kasus tanpa surfaktan, digunakan nilai  $S = -3.5$ . Dari nilai

awal  $x(0) = 1$  dan  $\dot{x}(0) = 0.01$ , garis kontak bergerak kemudian mencapai keadaan setimbang pada titik  $(3, 0)$ . Hal ini bersesuaian dengan analisa kestabilan linier bahwa dengan nilai parameter-parameter tersebut,  $x(t)$  dan  $\dot{x}(t)$  stabil ke  $(x_p, 0) = (3, 0)$ . Berdasarkan Persamaan (4.6.6), keberadaan surfaktan pada fluida sekitar berdampak pada penurunan nilai  $S$ . Pada simulasi ini digunakan  $\Delta\lambda = 0.7, \Gamma = 1$ , yang memberikan nilai  $S = -4.2$ , sehingga  $x(t)$  dan  $\dot{x}(t)$  stabil ke  $(1.6, 0)$ .

Gambar 4.23(b) menunjukkan deformasi dari bentuk bulir minyak dari keadaan awal ke keadaan setimbang, untuk dengan dan tanpa surfaktan. Untuk luas penampang bulir digunakan nilai  $V = \frac{\pi}{2}$ , sehingga berdasarkan Persamaan (4.6.7), bentuk awal dari bulir adalah setengah lingkaran dengan jari-jari  $x(0) = 1$ . Berdasarkan Gambar 4.23 (b), bentuk bulir minyak tanpa surfaktan lebih menyebar dari pada bulir dengan memuat surfaktan. Oleh karena itu, sudut kontak dari bulir tanpa surfaktan lebih kecil daripada bulir yang memuat surfaktan. Hal ini mengindikasikan bahwa surfaktan memengaruhi penyebaran dari bulir minyak, yaitu membuat porsi minyak yang menempel ke permukaan padat menjadi lebih kecil (sifat kebasahan dari permukaan menjadi *water-wet*). Hal ini bersesuaian dengan hasil penelitian (Zhang dkk, 2006), (Chang dkk., 2007), dan Salehi, dkk. (2008) bahwa surfaktan dapat mengubah sifat kebasahan dari permukaan padat menjadi lebih *water-wet*.



**Gambar 4.23** Perbandingan (a) dinamika  $x(t)$  dan (b) bentuk bulir cairan, untuk bulir dengan dan tanpa surfaktan [Sumber: artikel penulis].

**Kesimpulan:** Penelitian ini menyajikan sebuah model dengan pendekatan baru dan simulasi numerik tentang pengaruh surfaktan terhadap perubahan bentuk dari bulir cairan yang menempel di atas permukaan padat. Pada model ini dirumuskan persamaan untuk dinamika dari garis kontak dengan mempertimbangkan kesetimbangan gaya antara gaya hambat dan gaya dorong yang bergantung pada nilai koefisien penyebaran bulir.

Surfaktan berperan menurunkan nilai koefisien penyebaran tersebut. Berdasarkan hasil simulasi numerik diperoleh bahwa model yang dirumuskan bersesuaian dengan hasil-hasil eksperimen sebelumnya yang menyatakan bahwa surfaktan dapat mengubah sifat kebasahan dari permukaan padat menjadi lebih *water-wet*.

#### 4.7 Masalah Nilai Awal Fuzzy pada Model Osilator Harmonik

**Sumber:** M. A. Karim, A. Y. Gunawan, M. April dan K. A. Sidarto, *Solving a Fuzzy Initial Value Problem of a Harmonic Oscillator Model*, AIP Conference Proceedings 1825, 020011 (2017); doi: 10.1063/1.4978980, View online: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4978980>.

**Pendahuluan:** Salah satu perilaku yang sering teramati di dunia nyata adalah perilaku periodik. Selain itu, keterbatasan teknologi yang tersedia dan perubahan kondisi lingkungan dapat berdampak pada ketidakpastian pengukuran. Oleh karena itu, diperlukan deskripsi matematis yang dapat mengakomodasi permasalahan ketidakpastian dan perilaku osilasi agar dapat melakukan analisis dan prediksi terhadap perilaku sistem yang diamati. Untuk mendapatkan wawasan tentang permasalahan ini, sebuah Masalah Nilai Awal Fuzzy (FIVP) Model Osilator Harmonik (HOM) akan dikaji. Model diberikan oleh persamaan berikut.

$$\tilde{y}_1' = \tilde{y}_2, \tilde{y}_2' = -k_1\tilde{y}_1 - k_2\tilde{y}_2, \tilde{y}_1(0) = \tilde{y}_{1_0}, \tilde{y}_2(0) = \tilde{y}_{2_0} \quad (4.7.1)$$

dengan  $\tilde{y}_{1_0}, \tilde{y}_{2_0} \in \mathfrak{S}_\phi(\mathbb{R})$  adalah kondisi awal,  $supp(\tilde{y}_{1_0}), supp(\tilde{y}_{2_0}) \subseteq \mathbb{R}^+$  dan  $k_1, k_2$  merupakan parameter konstan. Di sini,  $\mathfrak{S}_\phi(\mathbb{R})$  adalah koleksi dari semua bilangan fuzzy di  $\mathbb{R}$ . Dua hal penting yang kemudian akan dipelajari adalah penerapan konsep diferensial fuzzy dan metodologi penyelesaian FIVP.

Secara umum, konsep persamaan diferensial yang mengakomodasi suatu ketidakpastian disebut Persamaan Diferensial Fuzzy (FDE). Salah satu konsep FDE tersebut adalah *Hukuhara Differential* (HD), yang diturunkan dari konsep fungsi bernilai interval. Selain itu, dikenal juga konsep FDE yang didasarkan pada konsep  $\alpha$ -cut dan disebut sebagai *Seikkala Differential*, yang kemudian terbukti setara dengan konsep HD. Kedua konsep tersebut kemudian diperluas menjadi apa yang disebut sebagai *Generalized Hukuhara Differentials* (GHD). Konsep lainnya adalah *Fuzzy Differential Inclusion* (FDI).

**Tujuan penelitian:** Tujuan penelitian ini adalah untuk mengembangkan metode yang dapat mengatasi ketidakpastian dalam pemodelan sistem osilasi periodik, khususnya osilator harmonik, dengan mempertimbangkan nilai awal yang mengandung ketidakpastian dalam bentuk bilangan fuzzy. Hal ini dilakukan untuk mengevaluasi konsep HD, GHD, dan FDI pada solusi dari masalah nilai awal fuzzy, Selain itu, akan dikaji juga efektivitas dan akurasi dari masing-masing konsep dalam memodelkan perilaku osilasi dari sistem.

**Model Matematika:** Kondisi awal  $\tilde{y}_{1,0}, \tilde{y}_{2,0}$  pada Persamaan (4.7.1). adalah bilangan fuzzy, maka penyelesaiannya harus berupa fungsi kontinu bernilai fuzzy  $\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t)$  pada sembarang  $t$ . Misalkan  $\alpha$ -cut dari  $\tilde{y}_1$  dan  $\tilde{y}_2$  adalah:

$$[\tilde{y}_1]^\alpha = [y_{1,\alpha}^-, y_{1,\alpha}^+] \quad \text{dan} \quad [\tilde{y}_2]^\alpha = [y_{2,\alpha}^-, y_{2,\alpha}^+] \quad (4.7.2)$$

Sebagai ilustrasi, misalkan kondisi awal berbentuk bilangan fuzzy segitiga yaitu  $\tilde{y}_{1,0} = A = \text{trimf}(x, [0,1,2])$  dan  $\tilde{y}_{2,0} = B = \text{trimf}(x, [1,2,3])$ , dengan  $\alpha$ -cut:

$$[\tilde{y}_{1,0}]^\alpha = [y_{1,0,\alpha}^-, y_{1,0,\alpha}^+] = [0.5, 1.5] \quad \text{dan} \quad [\tilde{y}_{2,0}]^\alpha = [y_{2,0,\alpha}^-, y_{2,0,\alpha}^+] = [1.5, 2.5] \quad (4.7.3)$$

untuk  $\alpha = 0.5$ . Dua perilaku akan dibahas : *decaying* dan *harmonic free vibrations*. Selanjutnya, ditentukan sistem deterministik  $\alpha$ -cut berdasarkan konsep HD, GHD, dan FDI.

1. Dengan menggunakan konsep HD, sistem deterministik  $\alpha$ -cut diberikan oleh

$$\begin{aligned} y_{1,\alpha}^{-'} &= y_{2,\alpha}^- & y_{2,\alpha}^{-'} &= -k_1 y_{1,\alpha}^+ - k_2 y_{2,\alpha}^+ \\ y_{1,\alpha}^{+'} &= y_{2,\alpha}^+ & y_{2,\alpha}^{+'} &= -k_1 y_{1,\alpha}^- - k_2 y_{2,\alpha}^- \\ y_{1,0,\alpha}^- &= 0.5 & y_{2,0,\alpha}^- &= 1.5 \\ y_{1,0,\alpha}^+ &= 1.5 & y_{2,0,\alpha}^+ &= 2.5 \end{aligned} \quad (4.7.4)$$

2. Dengan menggunakan konsep GHD, persamaannya sekarang adalah:

$$\begin{aligned} y_{1,\alpha}^{-'} &= y_{2,\alpha}^+ & y_{2,\alpha}^{-'} &= -k_1 y_{1,\alpha}^- - k_2 y_{2,\alpha}^- \\ y_{1,\alpha}^{+'} &= y_{2,\alpha}^- & y_{2,\alpha}^{+'} &= -k_1 y_{1,\alpha}^+ - k_2 y_{2,\alpha}^+ \\ y_{1,0,\alpha}^- &= 0.5 & y_{2,0,\alpha}^- &= 1.5 \\ y_{1,0,\alpha}^+ &= 1.5 & y_{2,0,\alpha}^+ &= 2.5 \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

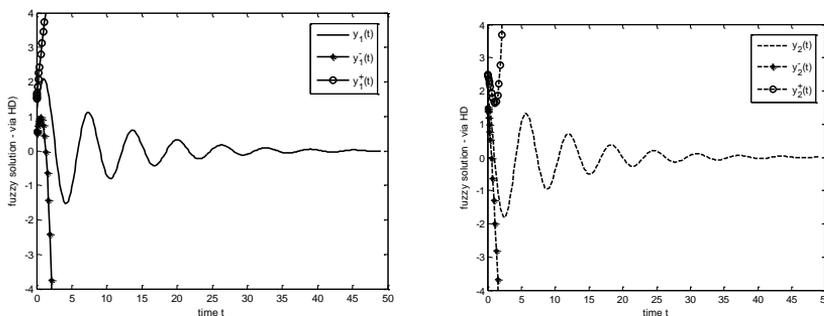
3. Dengan menggunakan konsep FDI, solusi  $\alpha$ -cut diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} [\tilde{y}(t)]^\alpha &= ([\tilde{y}_1(t)]^\alpha, [\tilde{y}_2(t)]^\alpha) \\ &= ([\min y_1(t), \max y_1(t)], [\min y_2(t), \max y_2(t)]) \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

**Metode solusi:** Konsep HD, GHD, dan FDI mengubah masalah fuzzy menjadi model deterministik  $\alpha$ -cut. Solusi model deterministik  $\alpha$ -cut yang selanjutnya disebut solusi fuzzy dapat ditentukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta.

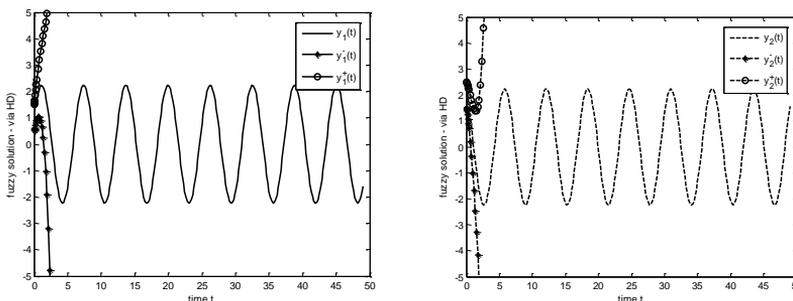
Hasil:

1. Menggunakan konsep HD. Untuk  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0.2$  dan dengan menggunakan metode Runge-Kutta, maka solusi Persamaan (4.7.4) disajikan pada Gambar 4.24.



**Gambar 4.24**  $\alpha$ -cut solusi fuzzy Persamaan (4.7.4) dengan  $k_1=1$  dan  $k_2=0.2$ . Gambar kiri:  $y_{1\alpha^-}(t)$  ditandai dengan tanda bintang,  $y_{1\alpha^+}(t)$  diberi tanda lingkaran, dan solusi  $y_1(t)$  oleh garis padat. Gambar kanan: notasi yang sama kecuali indeks 1 digantikan dengan indeks 2. [Sumber: artikel penulis].

Selanjutnya, untuk  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0$  dan dengan menggunakan metode Runge-Kutta, hasilnya disajikan pada Gambar 4.25.

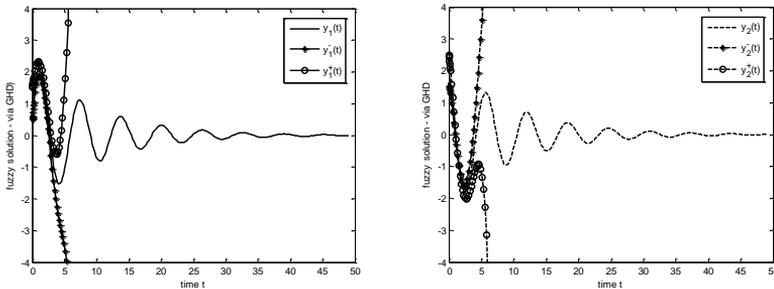


**Gambar 4.25** Informasi yang sama dengan Gambar 4.24 tetapi untuk  $k_1=1$  dan  $k_2=0$  [Sumber: artikel penulis].

Solusi fuzzy  $\tilde{y}_1(t)$  yang  $\tilde{y}_2(t)$  diperoleh dengan konsep HD tidak menunjukkan osilasi seperti yang ditunjukkan oleh solusi craps (solusi

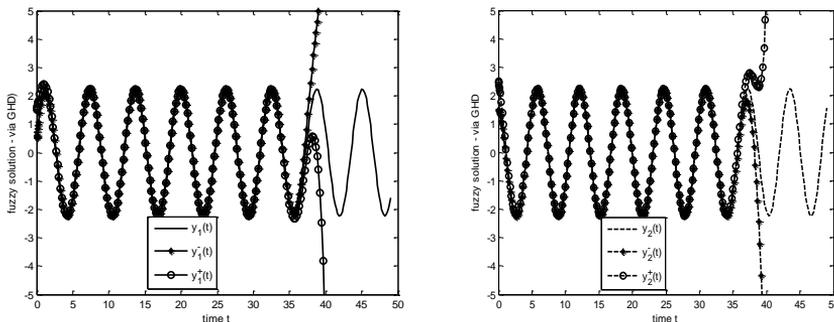
tanpa efek ketidakpastian), melainkan meningkat dengan sangat cepat. Artinya konsep HD tidak dapat menangkap perilaku osilasi.

2. Menggunakan Konsep GHD. Dengan menggunakan nilai parameter serupa seperti pada Konsep HD, hasilnya disajikan pada Gambar 4.26-4.27



**Gambar 4.26** Informasi yang sama dengan Gambar 4.24 tetapi untuk konsep GHD [Sumber: artikel penulis].

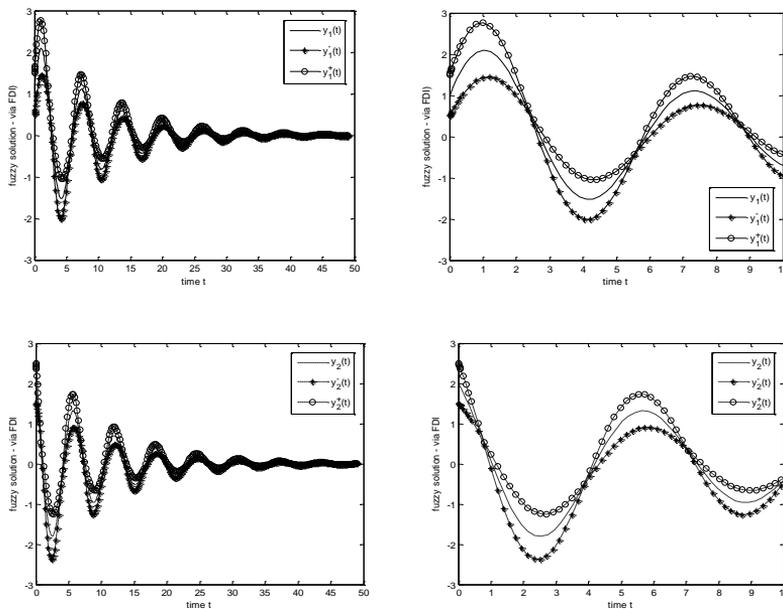
Hasil pada Gambar 4.26 menunjukkan bahwa solusi fuzzy  $\tilde{y}_1(t)$  memiliki diameter yang tidak berkurang dan  $\tilde{y}_2(t)$  diameternya tidak bertambah. Hal ini menyebabkan adanya titik peralihan di mana solusi  $\alpha$ -cut batas bawah kemudian akan menjadi solusi  $\alpha$ -cut batas atas; hal ini tidak mungkin terjadi.



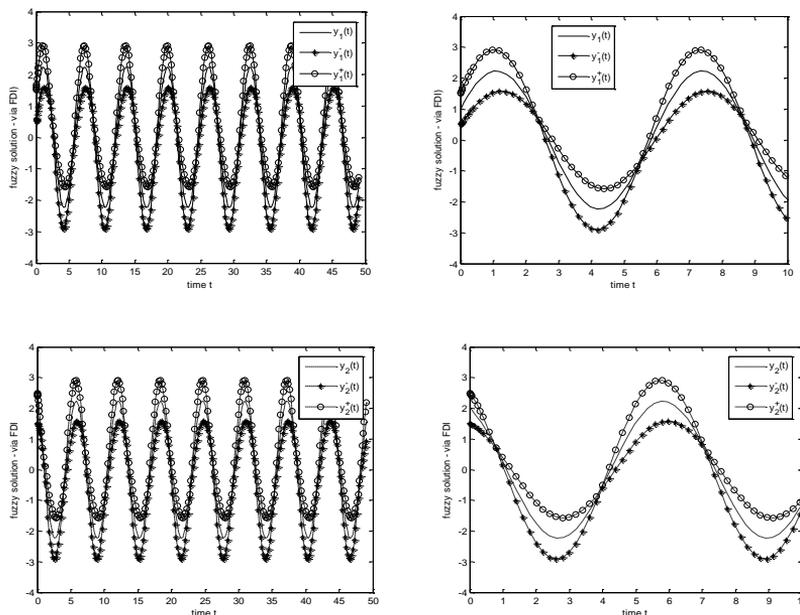
**Gambar 4.27** Informasi yang sama dengan Gambar 4.25 tetapi untuk konsep GHD [Sumber: artikel penulis].

Hasil pada Gambar 4.27 menunjukkan bahwa penerapan konsep GHD dapat mempertahankan diameter  $\alpha$ -cut dari solusi fuzzy untuk beberapa periode, namun kemudian solusi fuzzy meningkat dengan cepat. Kesimpulannya, konsep GHD tidak dapat menangkap seluruh perilaku osilasi.

3. Menggunakan konsep FDI. Dengan menggunakan nilai parameter serupa seperti pada Konsep HD, hasilnya disajikan pada Gambar 4.28-4.29.



**Gambar 4.28** Informasi yang sama dengan Gambar 4.24 tetapi untuk konsep FDI. Bagian kanan gambar menyajikan solusi di awal waktu [Sumber: artikel penulis].



**Gambar 4.29** Informasi yang sama dengan Gambar 4.25 tetapi untuk konsep FDI. Bagian kanan gambar menyajikan solusi di awal waktu [Sumber: artikel penulis].

Dengan menggunakan konsep FDI, perilaku osilasi dapat ditangkap. Adanya fungsi “min” dan “max” menjamin kesinambungan dan keterbatasan fungsi  $y_1(t) \in [y_{1\alpha}^-(t), y_{1\alpha}^+(t)]$  dan  $y_2(t) \in [y_{2\alpha}^-(t), y_{2\alpha}^+(t)]$ .

**Kesimpulan:** Dalam penelitian ini, tiga konsep solusi fuzzy diuji untuk menangkap perilaku osilasi model osilasi harmonik. Dua di antaranya, yaitu HD dan generalisasinya (GHD), tidak mampu menangkap osilasi tersebut. Sebaliknya, konsep FDI mampu menangkap fluktuasi dan menjaga ketidakpastian solusi. Hasil penelitian ini dapat memberikan beberapa ide untuk mempelajari lebih lanjut perilaku osilasi suatu sistem yang mengandung ketidakpastian, yang mungkin sering terjadi pada sistem biologis, misal model Goodwin. Model tersebut menunjukkan terjadinya osilasi yang berkelanjutan dalam sistem genetik minimal berdasarkan loop umpan balik negatif.

## 4.8 Model Tak Terstruktur Sistem Fermentasi Etanol Multiseluler

**Sumber:** Kasbawati, A.Y. Gunawan, K.A. Sidarto., *Washout and non-washout solutions of a system describing microbial fermentation process under the influence of growth inhibitions and maximal concentration of yeast cells*, *Mathematical Biosciences*. 289 (2017), 40-50, <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2017.04.003>.

**Pendahuluan:** Fermentasi adalah proses mikrobiologi yang dapat dipandang sebagai sistem dinamik yang kompleks. Pertumbuhan sel umumnya dipengaruhi oleh berbagai kondisi lingkungan, baik fisik maupun kimia. Pada kondisi anaerobik dan konsentrasi glukosa yang cukup tinggi, sel ragi akan memproduksi etanol. Sebaliknya pada kondisi aerobik, sel cenderung memproduksi energi untuk pembelahan sel yang mengakibatkan terjadinya pertambahan pada jumlah sel. Akan tetapi, pertambahan etanol dan jumlah sel tersebut memberikan efek inhibisi pada laju pertumbuhan sel itu sendiri. Hal tersebut mengindikasikan bahwa regulasi sistem fermentasi tidak dapat difokuskan hanya pada regulasi internal sel (proses metabolisme). Regulasi lingkungan pertumbuhan juga perlu dilakukan di antaranya melalui regulasi ketersediaan glukosa sebagai nutrisi sel tersebut. Dalam penelitian ini, diuraikan kondisi kultur pertumbuhan sel yang menentukan keberhasilan atau kegagalan sistem fermentasi. Model tak terstruktur digunakan sebagai

model matematika yang fokus mengkaji interaksi antara sel dan lingkungan kultur pertumbuhan tanpa mempertimbangkan proses internal sel.

**Tujuan penelitian:** Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji pengaruh inhibisi oleh substrat, produk, dan penambahan jumlah populasi sel terhadap keberhasilan atau kegagalan sistem fermentasi.

**Model Matematika:** Model tak terstruktur dari sistem fermentasi etanol dikonstruksi berdasarkan pada asumsi-asumsi berikut:

- a. Proses fermentasi yang dikaji merupakan proses fermentasi kontinu yang berlangsung pada kondisi yang ideal.
- b. Laju perubahan konsentrasi sel dipengaruhi oleh laju pertumbuhan alami sel tersebut dan laju konsentrasi sel yang keluar dari reaktor persatuan waktu. Diasumsikan tidak ada suplai sel ke dalam reaktor. Sel baru hanya terbentuk dari replikasi sel awal yang ditumbuhkan.
- c. Laju perubahan konsentrasi sel dimodelkan menggunakan model logistik yang melibatkan interaksi antar-sel. Sedangkan pertumbuhan alami sel ragi diasumsikan bergantung pada keberadaan glukosa sebagai sumber makanan utama untuk sel tersebut.
- d. Pada konsentrasi substrat atau produk yang cukup tinggi, pertumbuhan sel pada umumnya akan mengalami inhibisi. Pola inhibisi sel analog dengan pola inhibisi enzim yang dapat terjadi secara kompetitif atau nonkompetitif. Fermentasi etanol merupakan salah satu kasus inhibisi secara nonkompetitif.
- e. Laju konsumsi substrat dan laju pembentukan produk sel diperoleh melalui koefisien yield, yaitu rasio laju produksi terhadap laju konsumsi untuk suatu pasangan substrat dan produk.
- f. Diasumsikan pula bahwa sel membutuhkan suplai nutrisi yang sebagian digunakan untuk memproduksi energi (*maintenance energy*).
- g. Laju masukan substrat glukosa diasumsikan konstan persatuan waktu dengan konstanta laju sebesar  $\rho$ , dengan  $\rho$  merupakan laju pengenceran (*dilution rate*). Sedangkan laju keluaran sel dan laju keluaran produk fermentasi diasumsikan berbanding lurus dengan konsentrasi dari masing-masing sel dan produk fermentasi tersebut pada saat  $t$ .

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut diperoleh model tak terstruktur dari sistem fermentasi sel ragi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dC(t)}{dt} &= \mu C(t) \left(1 - \frac{C(t)}{C_m}\right) - \rho C(t), \\
\frac{dG(t)}{dt} &= \rho(G_s - G(t)) - \frac{1}{Y_{cg}} \mu C(t) \left(1 - \frac{C(t)}{C_m}\right) - mC(t), \\
\frac{dE(t)}{dt} &= Y_{ec} \mu C(t) \left(1 - \frac{C(t)}{C_m}\right) - \rho E(t), \\
\frac{dA(t)}{dt} &= Y_{ac} \mu C(t) \left(1 - \frac{C(t)}{C_m}\right) - \rho A(t),
\end{aligned}$$

dengan

$$\mu = \frac{\mu_m G(t)}{G(t) + \theta} \left(1 - \frac{G(t)}{G_m}\right) \left(1 - \frac{E(t)}{E_m}\right) \left(1 - \frac{A(t)}{A_m}\right).$$

Konsentrasi awal untuk masing-masing variabel adalah  $C(0) = C_0$ ,  $G(0) = G_0$  dengan  $C_0$  dan  $G_0$  adalah sebuah konstanta positif. Sedangkan untuk etanol dan asetat, konsentrasi awal keduanya adalah nol karena diasumsikan bahwa belum ada produk fermentasi dalam fermentor,  $E(0) = A(0) = 0$ . Normalisasi pada kedua persamaan di atas menghasilkan model tak berdimensi:

$$\begin{aligned}
\frac{dX_1(\tilde{t})}{d\tilde{t}} &= \left\{ \frac{X_2(\tilde{t})}{X_2(\tilde{t}) + \theta_d} \prod_{i=1}^4 [1 - X_i(\tilde{t})] \right\} X_1(\tilde{t}) - \rho_d X_1(\tilde{t}), \\
\frac{dX_2(\tilde{t})}{d\tilde{t}} &= \rho_d [X_s - X_2(\tilde{t})] - \left\{ \frac{X_2(\tilde{t})}{X_2(\tilde{t}) + \theta_d} \prod_{i=1}^4 [1 - X_i(\tilde{t})] \right\} \sigma_1 X_1(\tilde{t}) - m_d X_1(\tilde{t}), \\
\frac{dX_3(\tilde{t})}{d\tilde{t}} &= \left\{ \frac{X_2(\tilde{t})}{X_2(\tilde{t}) + \theta_d} \prod_{i=1}^4 [1 - X_i(\tilde{t})] \right\} \sigma_2 X_1(\tilde{t}) - \rho_d X_3(\tilde{t}), \\
\frac{dX_4(\tilde{t})}{d\tilde{t}} &= \left\{ \frac{X_2(\tilde{t})}{X_2(\tilde{t}) + \theta_d} \prod_{i=1}^4 [1 - X_i(\tilde{t})] \right\} \sigma_3 X_1(\tilde{t}) - \rho_d X_4(\tilde{t}),
\end{aligned}$$

dengan parameter tak berdimensi,

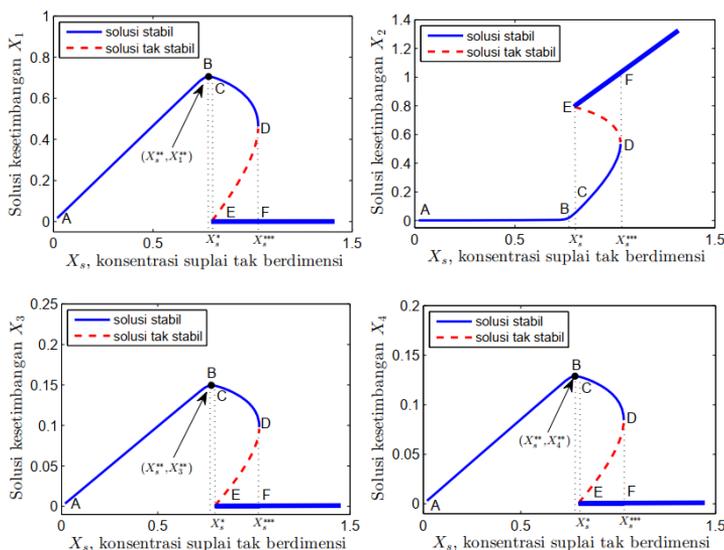
$$\begin{aligned}
\rho_d &= \frac{\rho}{\mu_m}, \quad \theta_d = \frac{\theta}{G_m}, \quad X_s = \frac{G_s}{G_m}, \quad m_d = \frac{mC_m}{\mu_m G_m}, \\
\sigma_1 &= \frac{C_m}{Y_{cg} G_m}, \quad \sigma_2 = \frac{C_m Y_{ec}}{E_m}, \quad \sigma_3 = \frac{C_m Y_{ac}}{A_m},
\end{aligned}$$

dan nilai awal tak berdimensi

$$X_1(0) = X_1^0, \quad X_2(0) = X_2^0, \quad X_3(0) = X_4(0) = 0.$$

**Metode solusi:** Solusi kesetimbangan sistem diselesaikan untuk menentukan parameter bifurkasi sistem.

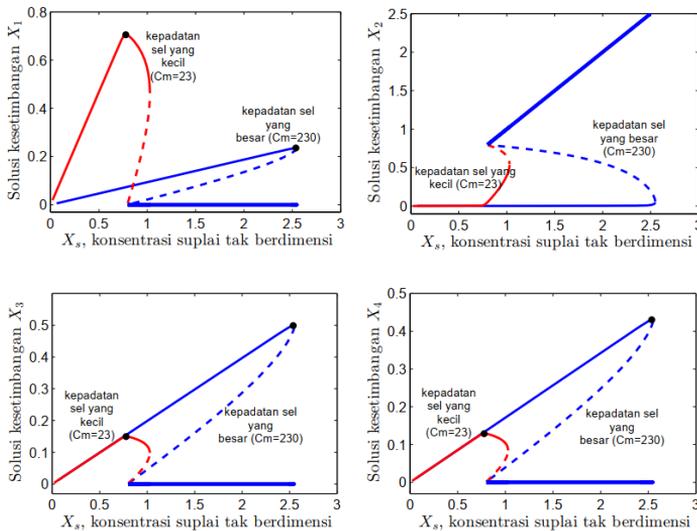
**Hasil:** Analisis terhadap model tak berdimensi menghasilkan dua jenis solusi kesetimbangan. Solusi kesetimbangan *washout* yang ditandai dengan hilangnya sel dalam reaktor untuk waktu yang lama, dan solusi kesetimbangan *nonwashout* yang menunjukkan besar konsentrasi setimbang dari substrat dan produk sistem fermentasi untuk suatu nilai parameter eksperimen tertentu. Kurva bifurkasi dari solusi kesetimbangan tersebut diberikan oleh Gambar 4.30 dengan  $X_s$  sebagai parameter bifurkasi. Garis A-B-C-D-E merupakan garis solusi kesetimbangan nonwashout, sedangkan garis E-F merupakan garis solusi kesetimbangan washout. Pada domain  $X_s^* < X_s < X_s^{***}$ , diperoleh tiga solusi kesetimbangan yang memunculkan sifat *multiple steady-states* dalam sistem. Lebih jauh, suplai  $X_s = X_s^{**}$  merupakan konsentrasi suplai glukosa yang optimal karena akan menghasilkan solusi kesetimbangan sel dan produk fermentasi yang maksimum. Sedangkan suplai  $X_s = X_s^{***}$  merupakan suplai glukosa kritis di mana konsentrasi suplai glukosa yang lebih besar dari  $X_s^{***}$  akan menghasilkan solusi kesetimbangan yang *washout*.



**Gambar 4.30** Kurva bifurkasi dari solusi kesetimbangan sistem dengan laju pengenceran tak berdimensi yang tetap ( $\rho_d = 0; 21$ ) dan  $X_s$  sebagai parameter bifurkasi [Sumber: artikel penulis].

Misalkan proses fermentasi dimulai pada konsentrasi suplai glukosa  $X_s$  yang rendah (substrate limitation). Dalam Gambar 4.30 dapat dilihat bahwa solusi

kesetimbangan  $X_1$  diharapkan bertambah seiring dengan bertambahnya konsentrasi suplai glukosa  $X_s$  sepanjang garis A-B. Ketika nilai  $X_s$  ditambah sehingga melebihi nilai  $X_s^{**}$ , solusi kesetimbangan  $X_1$  menurun mengikuti garis B-C-D dengan  $X_s^{**} < X_s \leq X_s^{***}$ . Selanjutnya, ketika nilai  $X_s$  ditambah sehingga melebihi nilai  $X_s^{***}$ , solusi kesetimbangan sistem akan berpindah ke solusi kesetimbangan washout di titik F. Sebaliknya, ketika suplai glukosa  $X_s$  dimulai dari konsentrasi yang tinggi ke konsentrasi yang rendah, solusi kesetimbangan  $X_1$  akan berada pada garis washout F-E sampai akhirnya berpindah ke solusi kesetimbangan *nonwashout* di titik C. Konsentrasi setimbang  $X_1$  kemudian bertambah mengikuti garis C-B dan kemudian berkurang. Semakin rendah konsentrasi  $X_s$ , semakin menurun pula konsentrasi sel  $X_1$  mengikuti garis B-A. Analisis yang sama berlaku untuk substrat glukosa ( $X_2$ ), etanol ( $X_3$ ), dan asetat ( $X_4$ ). Kondisi tersebut mengakibatkan munculnya fenomena histeria pada solusi kesetimbangan sistem. Fenomena yang sama dapat diamati ketika nilai *carrying capacity* sel divariasikan (lihat Gambar 4.31).



**Gambar 4.31** Kurva bifurkasi dari solusi kesetimbangan sistem ketika nilai *carrying capacity* sel dinaikkan dari  $C_m = 23$  (merah) menjadi  $C_m = 230$  (biru) dengan  $X_s$  sebagai parameter bifurkasi [Sumber: artikel penulis].

**Kesimpulan:** Pada model tak terstruktur diperoleh solusi kesetimbangan *washout* dan solusi kesetimbangan *nonwashout* yang keduanya dapat stabil pada kondisi eksperimen tertentu dengan atau tanpa sifat osilasi di dalamnya. Terdapat pula konsentrasi suplai glukosa yang menghasilkan solusi

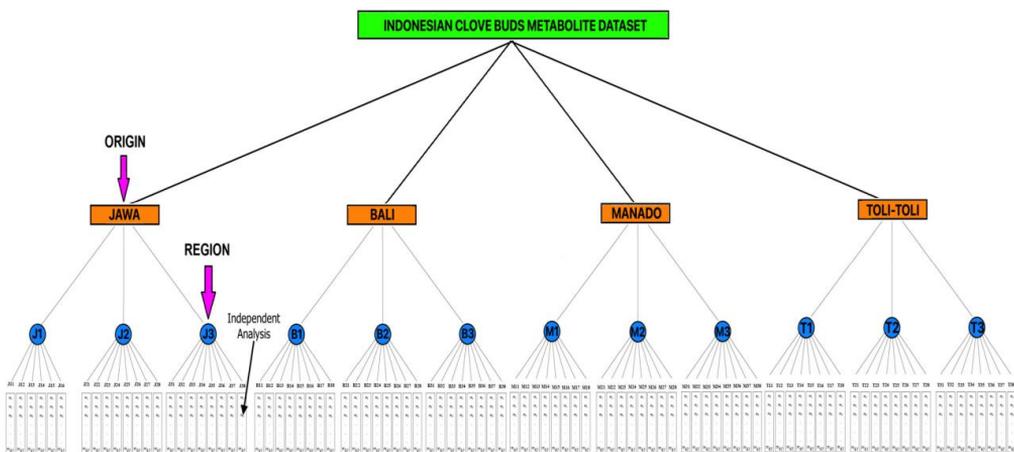
kesetimbangan yang maksimum untuk sel dan produk fermentasi. Kenaikan pada kepadatan maksimum sel memperluas daerah eksistensi solusi kesetimbangan *nonwashout* yang stabil (solusi yang diharapkan). Dari kajian intraseluler dan ekstraseluler sistem fermentasi etanol, diperoleh hasil yang menghubungkan keduanya di mana suplai glukosa dengan konsentrasi yang besar tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap produksi etanol dan sel-sel baru sehingga suplai glukosa secara kontinu harus diatur sedemikian rupa sehingga solusi *nonwashout* diperoleh.

## 4.9 Klasterisasi Data Metabolomik

**Sumber:** Rustam, A. Y. Gunawan, and M. T. A. P. Kresnowati, *Data dimensionality reduction technique for clustering problem of metabolomics data*, Heliyon, vol 8, no. 6, e09715, 2022.

**Pendahuluan:** Dalam studi metabolomik, analisis independen atau replikasi pengukuran konsentrasi metabolit sering dilakukan untuk mengantisipasi kesalahan pengukuran. Di lain sisi, ukuran kumpulan data menjadi meningkat. Untuk tujuan klasterisasi, diperlukan informasi representatif secara kimia dari replikasi pengukuran atau analisis independen yang dilakukan. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan metode reduksi data sehingga diperoleh data yang mampu mewakili informasi kimia pada kumpulan data yang direduksi. Dalam penelitian ini, dilakukan kajian metabolomik terhadap salah satu komoditas perkebunan alam yang berasal dari Indonesia, yaitu kuncup cengkeh. Kuncup cengkeh yang dipanen dari berbagai daerah dilaporkan memiliki cita rasa tertentu yang diduga sesuai dengan profil metaboliknya. Metode untuk membedakan jenis kuncup cengkeh selama ini adalah metode kualitatif konvensional, yaitu memanfaatkan jasa *flavorist* yang mengecap dan mencium kuncup untuk mengidentifikasi aroma dan rasa kuncup cengkeh. Pengembangan metode metabolik akan menjadi dasar penting untuk mengembangkan instrumen otomatis untuk membedakan berbagai jenis kuncup cengkeh. Namun, kompleksitas dataset (lihat Gambar 4.32) metabolit kuncup cengkeh menghambat pengelompokan langsung kuncup cengkeh berdasarkan komposisi metabolitnya. Diperlukan teknik yang tepat untuk menangani kompleksitas ini.

Salah satu kompleksitas dataset metabolit yaitu umumnya memiliki rentang konsentrasi metabolit yang lebar, yaitu dari  $10^{-4}$  hingga  $10^1$ . Oleh karena itu, transformasi logaritmik digunakan untuk memperoleh data numerik yang andal. Di lain sisi, beberapa metabolit memiliki konsentrasi nol sehingga transformasi logaritmik tidak dapat diterapkan secara langsung. Metabolit yang memiliki konsentrasi nol tidak dihilangkan dari kumpulan data karena konsentrasi nol dapat disebabkan oleh keterbatasan alat yang digunakan untuk mendeteksi metabolit dengan konsentrasi kecil (kurang dari  $10^{-4}$ ). Selain itu, metabolit ini dapat berfungsi sebagai *biomarker* asal kunci cengkeh tertentu. Oleh karena itu, kami mengganti metabolit konsentrasi nol dengan nilai satu orde lebih kecil dari konsentrasi metabolit terkecil yang mampu terdeteksi. Metabolit dengan konsentrasi nol diganti  $10^{-5}$ .



**Gambar 4.32** Struktur dataset metabolit kunci cengkeh [Sumber: artikel penulis].

Pada penelitian ini, kami mengusulkan *Modified Weiszfeld Algorithm* (MWA) untuk mereduksi analisis independen. Untuk memperoleh hasil yang komprehensif, kami membandingkan MWA dengan beberapa metode reduksi terkenal lainnya, di antaranya PCA, CMDS, LE, dan LLE. Kemudian, data hasil reduksi diklasterisasi menggunakan algoritma fuzzy c-means (FCM) dengan indeks Tang Sun Sun (TSS) dan indeks siluet sebagai indeks validitas kluster.

**Tujuan penelitian:** Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengembangkan dan mengevaluasi teknik reduksi dimensi data yang efektif dalam konteks *clustering* data metabolomik. Teknik reduksi dimensi diharapkan dapat meningkatkan performa *clustering* dengan cara menyederhanakan data tanpa kehilangan informasi penting.

**Model Matematika:** Dalam penelitian ini, MWA diusulkan untuk mereduksi delapan analisis independen (vektor data) menjadi satu vektor data. Algoritma Weiszfeld dirumuskan secara matematis yaitu mencari  $y \in R^d$  yang menyelesaikan

$$\min_y \left\{ C(y) = \sum_{i=1}^n \eta_i \|y - x_i\| \right\}$$

dengan  $y$  menyatakan titik data representatif yang dicari untuk setiap wilayah,  $x_i \in R^d$  menyatakan analisis independen di setiap wilayah,  $d$  mewakili jumlah metabolit di setiap analisis independen,  $\|y - x_i\|$  menyatakan jarak Euclid antara  $y$  dan  $x_i$  dalam  $R^d$ , dan  $\eta_i$  menyatakan bobot yang terkait dengan jarak Euclid antara  $x_i$  dan  $y$ . Solusi dari permasalahan ini disajikan sebagai berikut:

$$T(y) = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \frac{x_i}{\|y - x_i\|}}{\sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{\|y - x_i\|}}$$

dengan  $y = T(y)$  dan  $T : R^d \rightarrow R^d$ . Algoritma Weiszfeld mengalami kebuntuan ketika  $y = x_i$ , hal ini disebabkan oleh pembagian dengan nol. Oleh karena itu, (Vardi dan Zhang, 2001) memodifikasi algoritma Weiszfeld untuk menangani kondisi  $y = x_i$ . Modifikasinya memberikan hasil sebagai berikut:

$$y \rightarrow T(y) = \left( 1 - \frac{\eta(y)}{r(y)} \right) \tilde{T}(y) + \min \left( 1, \frac{\eta(y)}{r(y)} \right) y,$$

di mana

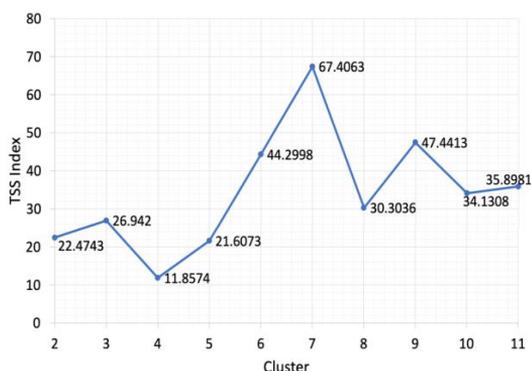
$$r(y) = \|\tilde{R}(y)\|, \quad \tilde{R}(y) = \sum_{x_i \neq y} \eta_i \frac{x_i - y}{\|x_i - y\|}$$

$\tilde{R}(y)$  menyatakan negatif gradien dari  $C(y)$ .

**Metode Solusi:** Untuk mendapatkan hasil yang komprehensif, kami membandingkan MWA yang kami usulkan dengan beberapa metode reduksi dimensi data terkenal lainnya. Metode-metode tersebut adalah *principal component analysis* (PCA), *classical multidimensional scaling* (CMDs), *laplacian*

*eigenmaps* (LE), and *locally linear embedding* (LLE). Tujuan utama dari makalah ini adalah untuk mengembangkan dan mengevaluasi keandalan MWA sebagai teknik reduksi dimensi data, khususnya untuk data metabolomik. Makalah ini tidak menyajikan perbandingan teknik *clustering* dan indeks validitas kluster. Jadi, untuk *clustering* yang dibutuhkan, kami hanya menggunakan algoritma fuzzy c-means (FCM), dan untuk indeks validitas kluster, kami menggunakan indeks Tang Sun Sun (TSS).

**Hasil:** Hasil yang diperoleh dalam penelitian ini disajikan pada Gambar 4.33 serta beberapa tabel uraian berikutnya.



**Gambar 4.33** Nilai indeks Tang Sun Sun sebelum reduksi dimensi [Sumber: artikel penulis].

Gambar 4.33 menunjukkan nilai indeks TSS terkecil pada empat kluster. Hal ini berarti jumlah kluster yang optimal adalah empat kluster. Rincian anggota kluster dari masing-masing kluster ditunjukkan pada Tabel 4.2.

**Tabel 4.2** Hasil klusterisasi tanpa reduksi dimensi [Sumber: artikel penulis].

Kluster	Anggota Kluster
I	M11, M12, M13, M14, M15, M16, M17, M18, M21, M22, M23, M24, M25, M26, M27, M28, M31, M32, M33, M34, M35, M36, M37, M38, <b>T22, T33</b>
II	B11, B12, B13, B14, B15, B16, B17, B18, B21, B22, B23, B24, B25, B26, B27, B28, B31, B32, B33, B34, B35, B36, B37, B38
III	J11, J12, J13, J14, J15, J16, J21, J22, J23, J24, J25, J26, J27, J22, J31, J32, J33, J34, J35, J36, J37, J38
IV	T11, T12, T13, T14, T15, T16, T17, T18, T21, T23, T24, T25, T26, T27, T28, T31, T32, T34, T35, T36, T37, T38

Tabel 4.2 memberikan informasi bahwa masing-masing daerah asal kuncup cengkeh Indonesia memiliki karakteristik rasa dan aroma yang unik atau khas. Hal ini berdasarkan hasil pengelompokan yang menunjukkan analisis- analisis independen dari daerah asal yang sama menyebar dalam satu pengelompokan yang sama. Setiap pengelompokan terdiri atas analisis- analisis independen dari daerah asal yang sama dari keempat pengelompokan yang ada. Namun, Tabel 4.2 menunjukkan analisis- analisis independen T22 dan T33 termasuk dalam pengelompokan pertama yang umumnya berisi analisis- analisis independen dari daerah asal Manado. Hasil ini memberikan informasi yang bias karena dua analisis independen (T22 dan T33) dari daerah asal Toli-Toli menjadi satu pengelompokan dengan analisis- analisis independen dari daerah asal Manado. Kami menduga bahwa terdapat beberapa kesalahan dalam pengukuran konsentrasi metabolit pada analisis- analisis independen T22 dan T33, yang menyebabkan T22 dan T33 meninggalkan analisis- analisis independen lainnya dari daerah asal Toli-Toli dan menjadi satu pengelompokan dengan analisis- analisis independen dari daerah asal Manado. Oleh karena itu, untuk memperoleh hasil pengelompokan yang lebih informatif dan bermakna, kami mengusulkan reduksi dimensi analisis- analisis independen di setiap daerah menjadi satu titik data representasi (satu vektor data). Kumpulan data yang awalnya memiliki enam atau delapan analisis independen (titik data/vektor data) di setiap wilayah dikurangi menjadi satu titik data (lihat Gambar 4.32).

**Tabel 4.3** Nilai indeks Tang Sun Sun setelah reduksi dimensi [Sumber: artikel penulis].

Number of clusters	PCA	CMDS	LE	LLE	MWA
2	2.69	<b>1.48</b>	1.90	<b>2.11</b>	2.76
3	2.59	3.80	<b>1.82</b>	3.44	2.45
4	<b>1.99</b>	3.17	2.39	5.11	<b>1.87</b>
5	4.65	4.08	2.02	2.70	3.78
6	5.21	4.01	2.13	2.73	2.98
7	4.82	12.07	2.09	4.63	4.90
8	6.17	12.23	2.16	4.98	5.54
9	8.38	11.19	2.33	4.85	9.14
10	8.37	18.57	2.31	4.64	8.62
11	7.21	21.42	2.30	4.63	8.15

Tabel 4.3 menunjukkan jumlah kluster optimal yang diperoleh menggunakan PCA adalah empat kluster (lihat lebih jauh Tabel 4.4). Pada saat yang sama, jumlah kluster optimal dengan reduksi dimensi menggunakan CMDS adalah dua kluster. Jumlah kluster optimal dengan reduksi dimensi LE adalah tiga kluster. Jumlah kluster optimal dengan reduksi dimensi menggunakan LLE adalah dua kluster. Reduksi dimensi menggunakan MWA

yang kami usulkan memberikan jumlah kluster optimal, yaitu empat kluster (Tabel 4.5). Hasil menunjukkan bahwa setelah dilakukan reduksi dimensi menggunakan PCA dan MWA, daerah-daerah yang berasal dari titik asal yang sama juga berada dalam kluster yang sama. Jadi, dapat disimpulkan bahwa PCA dan MWA dapat mereduksi analisis independen di setiap daerah menjadi satu vektor data representatif. PCA dan MWA dapat menyerap informasi kimia maksimum di setiap daerah tanpa kehilangan informasi kimia penting di setiap daerah. Hal ini tidak terjadi pada tiga teknik reduksi dimensi lainnya yang digunakan.

**Tabel 4.4** Hasil klusterisasi dengan PCA sebagai teknik reduksi dimensi [Sumber: artikel penulis].

Cluster	Member of Cluster
I	M1, M2, M3
II	T1, T2, T3
III	B1, B2, B3
IV	J1, J2, J3

**Tabel 4.5** Hasil klusterisasi dengan MWA sebagai teknik reduksi dimensi [Sumber: artikel penulis].

Cluster	Member of Cluster
I	M1, M2, M3
II	B1, B2, B3
III	J1, J2, J3
IV	T1, T2, T3

Dilihat dari aspek kimia, dapat diinterpretasikan bahwa pengelompokan data metabolit cengkeh dengan reduksi dimensi analisis independen menggunakan PCA dan MWA menunjukkan bahwa setiap asal cengkeh memiliki komposisi kimia yang unik atau dengan kata lain, setiap asal cengkeh memiliki rasa dan aroma yang khas. Oleh karena itu, jika stok produksi asal cengkeh tidak tersedia, maka asal cengkeh lain yang tersedia tidak dapat digunakan untuk menggantikannya karena memiliki rasa dan aroma yang berbeda. Bagi produsen yang menggunakan cengkeh sebagai bahan dalam campuran produknya, cengkeh dari asal yang berbeda akan memberikan kualitas produk yang berbeda karena setiap asal cengkeh memiliki rasa dan aroma yang unik berdasarkan hasil pengelompokan ini.

**Kesimpulan:** Dalam makalah ini, kami telah menyajikan kinerja MWA sebagai salah satu teknik reduksi dimensi data. Kami membandingkan MWA dengan beberapa metode reduksi dimensi data terkenal lainnya untuk mendapatkan hasil yang lebih lengkap, di antaranya PCA, CMDs, LE, dan LLE. Hasil temuannya mengungkapkan bahwa MWA dan PCA memberikan reduksi dimensi analisis independen di setiap wilayah menjadi satu titik data (vektor data) sambil mempertahankan informasi kimia penting di setiap wilayah. Hasil klusterisasi juga relevan dengan hasil klusterisasi dataset metabolit kuncup cengkeh sebelum reduksi dimensi. Oleh karena itu, kami merekomendasikan MWA sebagai salah satu teknik reduksi dimensi data yang dapat diandalkan khususnya untuk dataset metabolomik yang terdiri atas analisis independen untuk mengantisipasi kesalahan dalam mengukur konsentrasi metabolit. Selain itu, kami juga telah menyajikan teknik diferensiasi cengkeh berdasarkan komposisi metabolitnya, yang sejauh ini hanya dilakukan dengan menggunakan metode kualitatif konvensional yang memanfaatkan layanan ahli rasa (*flavorist*). Berdasarkan hasil kluster yang diperoleh dengan reduksi dimensi menggunakan MWA, dapat disimpulkan bahwa dari keempat asal kuncup cengkeh Indonesia yang dikluster, jumlah kluster yang optimal adalah empat kluster. Artinya, setiap asal kuncup cengkeh memiliki karakteristik unik atau memiliki rasa dan aroma yang khas. Terakhir, kami merekomendasikan keandalan MWA sebagai salah satu teknik kemometrik yang penggunaannya dapat digunakan lebih luas dalam studi metabolomik. Tulisan ini telah memperkaya teknik kemometrik dalam studi metabolomik.

#### 4.10 Aliran Fluida Bingham pada Sebuah Saluran Media Berpori

**Sumber:** A.Y. Gunawan, A.A.F. van de Ven, *Non-steady pressure-driven flow of a Bingham fluid through a channel filled with a Darcy–Brinkman medium*, Journal of Engineering Mathematics, 2022, p. 137:5.

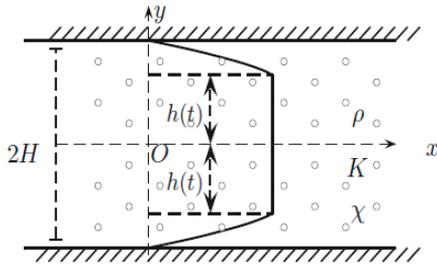
**Pendahuluan:** Aliran fluida tak-Newton yang sangat viskos di dalam media berpori mempunyai relevansi tinggi dalam beberapa proses, seperti peningkatan perolehan minyak dari reservoir bawah tanah, filtrasi larutan polimer, dan konverter katalitik. Fluida kompleks tak-Newton umumnya dimodelkan sebagai fluida visko-plastik, yang dicirikan oleh suatu parameter tegangan ambang (*yield stress*) di mana di bawah tegangan tersebut fluida tidak

mengalami deformasi, atau berperilaku seperti aliran padatan (*plug flow*) misalnya lumpur. Model paling sederhana untuk fluida tersebut adalah fluida Bingham. Fokus kajian yang menarik pada fluida ini adalah penentuan ukuran daerah padatan (*plug zone*), di mana fluida pada daerah ini berperilaku seperti media padatan yang kemudian dapat menjadi ukuran kemungkinan terjadinya sumbatan pada saluran yang berisi fluida ini. Kesulitan utama dalam kajian teoritis alira fluida ini adalah penentuan ukuran daerah tersebut menjadi bagian dari solusi yang harus dicari. Dengan demikian, masalah ini menjadi masalah batas bebas yang mengantarkan kepada sebuah persamaan diferensial tak linear.

**Tujuan penelitian:** Penelitian ini akan mengkaji pendekatan analitik aliran tidak tunak satu dimensi untuk fluida Bingham dalam saluran berisi media berpori yang seragam. Model Darcy-Brinkman akan dipilih sebagai model media berpori. Pilihan model media berpori ini termotivasi berdasarkan beberapa referensi penerapan di lapangan, meskipun perlu menjadi catatan bahwa keabsahan model ini dibatasi secara ketat pada media berpori dengan porositas mendekati 1. Hasil kajian ini diharapkan akan memberikan hasil kuantitatif yang memprediksi perilaku aliran awal fluid (*start-up flow*):

- aliran berevolusi menuju kondisi tunak;
- untuk permeabilitas kecil, *plug zone* akan bertambah lebar dan kecepatan fluida akan menurun.

**Model Matematika:** Perhatikan suatu fluida Bingham tak termampatkan dengan massa jenis  $\rho$  berada pada sebuah saluran berpori yang seragam dengan lebar  $2H$  dalam arah  $y$ , porositas  $\chi$ , dan permeabilitas  $K$ . Keberadaan media berpori diasumsikan tidak memengaruhi profil simetris kecepatan fluida. Fluida mengalir dalam arah  $x$  dengan medan kecepatan  $u = u(y, t)$ , simetris terhadap garis tengah. Dengan demikian, cukup meninjau solusi pada setengah bidang atas,  $0 \leq y \leq H$ . Aliran fluida didorong oleh gradien tekanan seragam yang bergantung pada waktu,  $\partial p / \partial x = -G(t)$ ,  $G(t) > 0$ . Daerah aliran terdiri atas daerah padatan (*plug zone*),  $[0, h(t)]$ , dan bagian fluida di dekat batas ( $h(t), H$ ). Situasi ini dapat dilihat pada Gambar 4.34.



**Gambar 4.34** Sketsa fluida Bingham pada sebuah saluran media berpori [Sumber: artikel penulis].

Penerapan persamaan momentum dan analisis dimensi mengantarkan pada dua model persamaan berikut:

- *Viscosity-dominated flow/viscosity-related time scale (VRT):*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_b}{\partial t} &= G(t) + \frac{\partial^2 u_b}{\partial y^2} - \beta^2 u_b, & \delta(t) \leq y \leq 1, \\ \frac{du_p}{dt} &= G(t) - \frac{Bn}{\delta(t)} - \beta^2 u_p, & 0 \leq y \leq \delta(t). \end{aligned}$$

- *Permeability-dominated flow/permeability-related time scale (PRT):*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_b}{\partial t} &= G(t) + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u_b}{\partial y^2} - u_b, & \delta(t) \leq y \leq 1, \\ \frac{du_p}{dt} &= G(t) - \frac{Bn}{\delta(t)} - u_p, & 0 \leq y \leq \delta(t). \end{aligned}$$

Pada persamaan di atas,  $\beta$  menyatakan parameter media berpori dan  $Bn$  menyatakan parameter fluida (Bilangan Bingham). Fungsi  $\delta(t)=h(t)/H$  merupakan lebar daerah padatan (*plug zone*) yang berubah sepanjang waktu  $t$ . Persamaan di atas dilengkapi oleh syarat awal

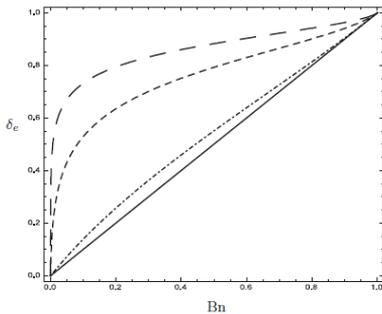
$$u(y, 0) = \begin{cases} F(\delta(0)), & 0 \leq y \leq \delta(0); \\ F(y), & \delta(0) \leq y \leq 1; \end{cases}$$

dengan fungsi  $F(y)$  merupakan fungsi terdiferensial, dan syarat batas

$$u_b(\delta(t), t) = u_p(t), \quad \frac{\partial u_b}{\partial y}(\delta(t), t) = 0, \quad u_b(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

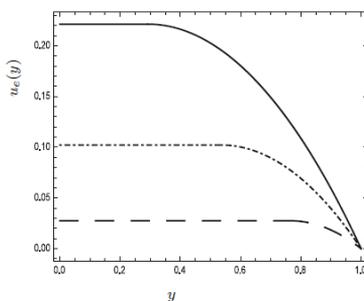
**Metode solusi:** Persamaan utama akan diselesaikan untuk dua kasus: solusi keadaan tunak dan solusi keadaan tidak tunak dengan penerapan tekanan konstan. Pendekatan solusi akan dilakukan melalui pendekatan semi-anaitik (metode asimtotik dilanjutkan dengan metode numerik). Peubah yang dihitung akan difokuskan pada penentuan lebar daerah padatan dan kecepatan fluida sebagai fungsi dari parameter media berpori  $\beta$  dan bilangan Bingham  $Bn$ .

**Hasil:** Untuk solusi keadaan tunak,  $t \rightarrow \infty$ , misalkan  $G_e$  menyatakan tekanan kosntan,  $\delta_e$  menyatakan lebar daerah padatan. Pada Gambar 4.35 disajikan lebar daerah padatan sebagai fungsi dari parameter fluida, untuk beragam parameter media berpori  $\beta$ . Hasil memperlihatkan bahwa keberadaan media berpori cenfderung untuk memperlebar daerah padatan  $\delta_e$ .



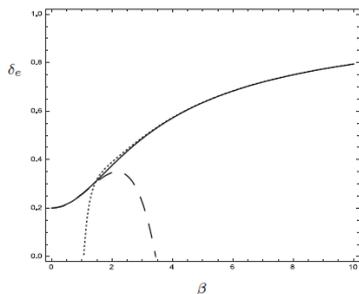
**Gambar 4.35** Lebar  $\delta_e$  sebagai fungsi dari  $Bn$  untuk berbagai nilai  $\beta$  : 0,1 (garis padat), 1 (titik-titik), 5 (putus-putus kecil), 10 (putus-putus besar) [Sumber: artikel penulis].

Pada Gambar 4.36 disajikan pula grafik kecepatan tunak  $u_e(y)$  sebagai fungsi dari  $y \in (0, 1)$  untuk berbagai nilai parameter  $Bn$  dan  $\beta$ .



**Gambar 4.36** Kecepatan keadaan tunak  $u_e(y)$  untuk  $\beta = 0,8$  dan  $Bn$ : 0,25 (garis padat), 0,5 (titik-putus-titik), dan 0,75 (putus-putus) [Sumber: artikel penulis].

Pada Gambar 4.37 disajikan pendekatan asimtotik lebar daerah padatan  $\delta_e$  untuk model VRT dan PRT yang dibandingkan dengan solusi eksaknya. Hasil memperlihatkan bahwa model asimtotik cukup baik untuk mendekati model eksaknya.

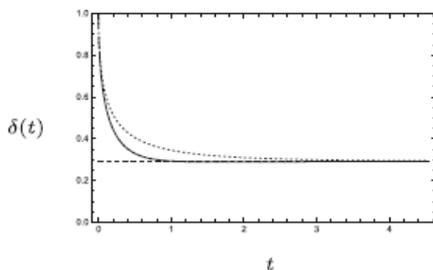


**Gambar 4.37** Lebar  $\delta_e$  sebagai fungsi dari  $\beta$  untuk  $Bn = 0,2$ ; dari rumus eksak (garis padat), aproksimasi VRT (garis putus-putus), dan aproksimasi PRT (titik-titik) [Sumber: artikel penulis].

Selanjutnya, untuk solusi tak tunak  $\delta(t)$  dilakukan dengan pendekatan numerik. Persamaan  $\delta(t)$  diatur oleh persamaan integral nonlinier. Persamaan berikut akan digunakan sebagai iterasi pertama,  $\delta(t) \approx \delta_1(t)$ ,

$$\delta_1(t) = (1 - \delta_e)e^{-c_1\sqrt{t}} + \delta_e$$

dengan  $c_1$  suatu konstanta yang bergantung pula pada  $\delta_e$ . Pada Gambar 4.38 disajikan grafik lebar daerah padatan  $\delta(t)$  yang dibandingkan dengan iterasi pertama  $\delta_1(t)$ , dan keadaan tunak  $\delta_e$ .



**Gambar 4.38** Lebar  $\delta(t)$  (garis padat),  $\delta_1(t)$  (titik-titik), dan  $\delta_e$  (garis putus-putus) [Sumber: artikel penulis].

**Kesimpulan:** Pada penelitian telah dikaji dua parameter  $Bn$  dan  $\beta$  yang mempunyai efek serupa terhadap perilaku fluida: peningkatan nilai  $Bn$  atau  $\beta$ , menyebabkan peningkatan lebar daerah padatan  $\delta(t)$  dan penurunan

kecepatan fluida. pada penelitian ini juga telah ditemukan aturan praktis, yang sangat berguna untuk masalah teknik, yaitu diperolehnya hampiran lebar padatan yang diberikan oleh  $\delta_1(t)$ .

#### 4.11 Pembentukan Pola Spasial pada Kondisi Wabah Model SI

**Sumber:** A. Triska, A.Y. Gunawan, N. Nuraini, *Outbreak spatial pattern formation based on an SI model with the infected cross-diffusion term*, Journal of Mathematics and Science 27 (1), 2022, p. 1-17.

<https://dx.doi.org/10.22436/jmcs.027.01.01>

**Pendahuluan:** Studi tentang penyebaran penyakit menular melalui model matematika (model epidemik) umumnya membagi populasi menjadi beberapa subpopulasi, yaitu populasi sehat tetapi rentan tertular penyakit (*Susceptible/S*), populasi terinfeksi (*Infected/I*), dan populasi sembuh (*Recovery/R*). Pada umumnya, model-model tersebut hanya menjelaskan dinamika penyebaran penyakit menular yang bergantung terhadap waktu saja. Akan tetapi, pada kenyataannya selain berinteraksi antar-individu, mereka juga bergerak/berpindah tempat dengan berbagai kepentingan sehingga memperluas ruang interaksi dengan individu lain (Sun dkk., 2009; Wei-Ming dkk., 2011). Oleh karena itu, dengan mempertimbangkan aspek spasial tersebut model epidemik dikembangkan menjadi model *epidemik spasio-temporal* (bergantung pada kordinat spasial dan waktu), yang memasukkan suku difusi sebagai representasi keterlibatan kordinat spasialnya, baik yang bersifat difusi mandiri (*self-diffusion*) maupun difusi silang (*cross-diffusion*).

Pada tahun 1952, Turing (Turing, 1952) menemukan sebuah konsep bahwa dalam sebuah sistem reaksi-difusi, kesetimbangan homogen yang stabil terhadap gangguan temporal yang kecil dapat menjadi tidak stabil dengan kehadiran suku difusi. Fenomena ini kemudian dikenal dengan istilah ketidakstabilan Turing, yang menghasilkan pola pada domain spasial yang dikenal dengan pola Turing (Murray, 2001).

**Tujuan penelitian:** Penelitian yang dilakukan akan membangun sebuah model epidemik spasio-temporal yang melibatkan difusi silang dari individu rentan (S) dan terinfeksi (I) secara bersama-sama, serta mempelajari dinamika pola-pola Turing yang terbentuk dari model tersebut secara analitis

dan numerik. Model epidemik spasial yang dibangun pada penelitian ini tidak hanya menggunakan difusi silang dari individu rentan saja seperti penelitian sebelumnya (Li dkk., 2009; Sun dkk., 2009; Berres dan Marin, 2013; Cai dkk., 2013; Fan, 2014), tetapi juga melibatkan difusi silang dari individu terinfeksi untuk menggambarkan situasi di mana mereka dapat bebas berpindah terutama ke area yang lebih padat individu rentan.

**Model Matematika:** Pada penelitian ini, suku difusi silang dari individu rentan merepresentasikan kecenderungan mereka untuk menghindari dari individu terinfeksi. Untuk dapat mewakili fenomena itu maka koefisien suku difusi silang dari individu rentan tersebut bernilai positif sehingga individu rentan terdifusi ke area dengan kepadatan individu terinfeksi yang lebih rendah. Akan tetapi, suku difusi silang dari individu terinfeksi merepresentasikan perpindahan individu terinfeksi ke area yang padat individu rentan untuk mengakses fasilitas umum seperti perkantoran, sekolah dan kampus, atau pusat perbelanjaan. Jika daerah tinjauan diperluas, suku ini juga dapat mewakili aktivitas urbanisasi yang sering terjadi untuk mengakses fasilitas pendidikan dan pekerjaan yang lebih banyak tersedia di kota-kota besar. Untuk dapat mewakili fenomena itu maka koefisien suku difusi silang dari individu terinfeksi tersebut bernilai negatif yang diaplikasikan pada tanda aljabar di depan suku difusi silang dari individu terinfeksi itu sendiri. Oleh karena itu, model epidemik spasial pada penelitian ini dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= rS\left(1 - \frac{S}{K}\right) - \beta \frac{SI}{S+I} + D_S \nabla^2 S + D_1 \nabla^2 I, \quad t > 0 \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \beta \frac{SI}{S+I} - \eta I + D_I \nabla^2 I - D_2 \nabla^2 S, \quad t > 0 \end{aligned}$$

dengan kondisi awal

$$S(x, y, 0) > 0, \quad I(x, y, 0) > 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

dan syarat batas

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial I}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

dengan  $\mathbf{n}$  adalah vektor normal dari batas  $\partial\Omega$  dan deskripsi tentang variabel dan parameter ditampilkan pada Tabel 4.6.

**Tabel 4.6** Deskripsi variabel dan parameter [Sumber: artikel penulis].

Notasi	Deskripsi	Dimensi
$S$	Jumlah individu rentan pada $(x, y)$ pada waktu $t$	orang
$I$	Jumlah individu terinfeksi pada $(x, y)$ pada waktu $t$	orang
$r$	Laju pertumbuhan individu rentan	1/waktu
$\beta$	Laju penginfeksian individu terinfeksi terhadap individu rentan	1/waktu
$\eta$	Laju kematian individu terinfeksi	1/waktu
$K$	Daya dukung alam ( <i>carrying capacity</i> )	orang
$D_S$	Koefisien difusi mandiri individu rentan	(panjang) <sup>2</sup> (1/waktu)
$D_I$	Koefisien difusi mandiri individu terinfeksi	(panjang) <sup>2</sup> (1/waktu)
$D_1$	Koefisien difusi silang individu rentan	(panjang) <sup>2</sup> (1/waktu)
$D_2$	Koefisien difusi silang individu terinfeksi	(panjang) <sup>2</sup> (1/waktu)
$\Omega$	Luas domain spasial	(panjang) <sup>2</sup>

Definisikan

$$S^* = \frac{S}{K}, \quad I^* = \frac{I}{K}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad t^* = \frac{Dt}{L^2},$$

Persamaan di atas dapat ditransformasi menjadi bentuk tak berdimensi, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= \gamma f(S, I) + d\nabla^2 S + \xi_1 d\nabla^2 I, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \gamma g(S, I) + \nabla^2 I - \xi_2 d\nabla^2 S, \end{aligned}$$

dengan  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  dan

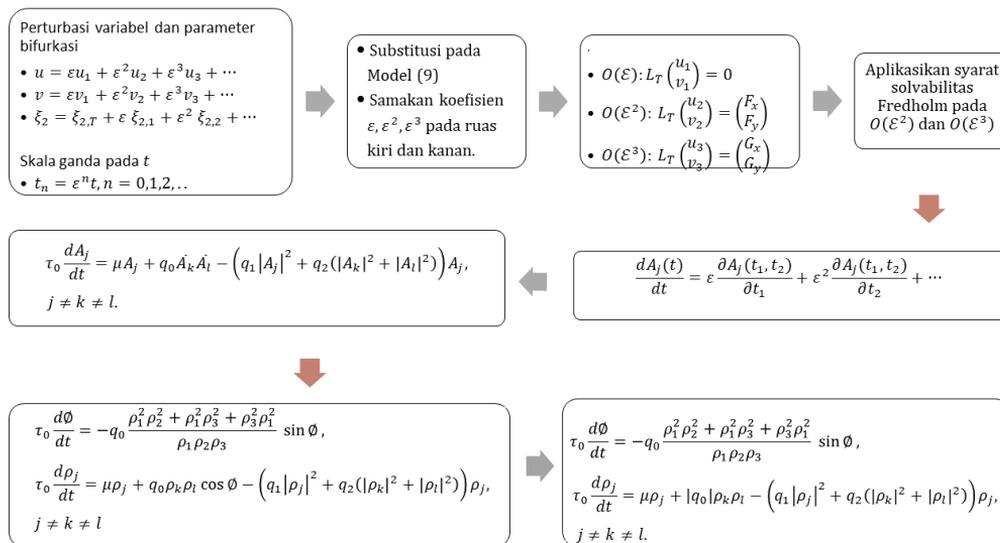
$$\begin{aligned} f(S, I) &= \alpha S(1 - S) - \frac{SI}{S + I}, \\ g(S, I) &= \frac{SI}{S + I} - \delta I, \end{aligned}$$

dengan

$$\alpha = \frac{r}{\beta}, \quad \delta = \frac{\eta}{\beta}, \quad \gamma = \frac{\beta L^2}{D_I}, \quad d = \frac{D_S}{D_I}, \quad \xi_1 = \frac{D_1}{D_S}, \quad \xi_2 = \frac{D_2}{D_S}.$$

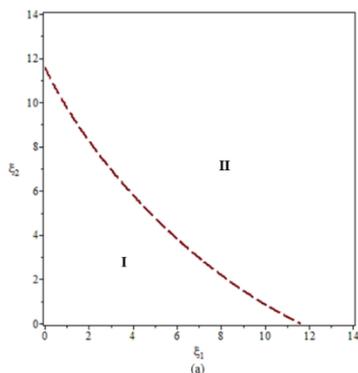
**Metode solusi:** Model tak berdimensi diselesaikan dengan analisis bifurkasi Turing dan metode perturbasi untuk menjustifikasi secara analitis pola-pola Turing yang terbentuk melalui simulasi numerik. Metode perturbasi pada penelitian ini digunakan untuk menghasilkan persamaan amplitudo. Sesaat akan terjadi bifurkasi Turing, dinamika dari suatu sistem berubah dengan sangat lambat. Persamaan amplitudo di sekitar titik bifurkasi Turing ditentukan dengan menggunakan analisis *multiple-scale* yang berguna untuk menginvestigasi kestabilan pola-pola yang terbentuk saat nilai parameter

bifurkasi berada di sekitar titik bifurkasinya. Untuk memperoleh persamaan amplitudo dilakukan tahapan kerja seperti yang ditampilkan pada Gambar 4.39.



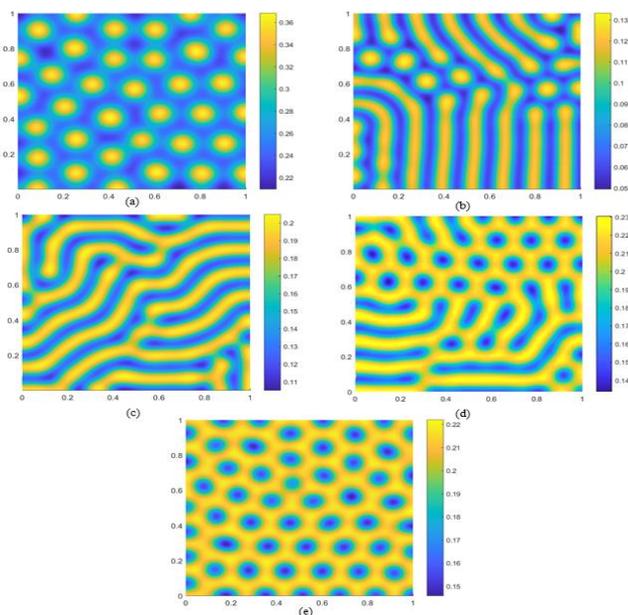
**Gambar 4.39** Langkah kerja persamaan amplitudo.

**Hasil:** Penelitian pada artikel ini membawa pada beberapa hasil yang signifikan. Hasil pertama yang diperoleh melalui analisis bifurkasi Turing adalah ruang Turing seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.40. Ruang Turing adalah suatu daerah yang pemilihan nilai pasangan parameter  $(\xi_1, \xi_2)$  pada ruang tersebut mampu membangun suatu pola spasial.



**Gambar 4.40** Ruang Turing Model dengan parameter bifurkasi  $\xi_2$  [Sumber: artikel penulis].

Hasil kedua, secara analitis dan numerik diperoleh lima tipe pola Turing, yaitu bintik-bintik (*spots*), campuran bintik-bintik dan garis-garis (*spots-stripes*), garis-garis (*stripes*), campuran garis-garis dan lubang-lubang (*stripes-holes*), serta lubang-lubang (*holes*). Sebagai perwakilan untuk masing-masing tipe pola tersebut ditampilkan pada Gambar 4.41 yang diperoleh dari lima variasi nilai koefisien difusi silang dari individu terinfeksi ( $\xi_2$ ) sebagai perwakilan masing-masing pola, yaitu  $\xi_2$  dengan nilai 0.01, 3, 7, 8.5, dan 9.5 yang masing-masing diambil pada saat iterasi 180.000. Lima tipe pola tersebut masing-masing menunjukkan dinamika penyebaran suatu penyakit menular yang berbeda-beda.



**Gambar 4.41** Pola-pola distribusi kepadatan populasi individu terinfeksi pada iterasi 180.000 dengan  $d = 0.05$ ,  $\gamma = 2500$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\alpha = 0.545$ ,  $\xi_1 = 1$  dan beberapa variasi nilai  $\xi_2$ . (a)  $\xi_2 = 0.01$ , (b)  $\xi_2 = 3$ , (c)  $\xi_2 = 7$ , (d)  $\xi_2 = 8.5$ , (e)  $\xi_2 = 9.5$  [Sumber: artikel penulis].

Gambar 4.41 (a) disebut pola bintik-bintik yang menyatakan bahwa wabah terjadi secara terlokalisasi pada area-area tertentu, yaitu pada area bintik-bintik kuning. Gambar 4.41 (b) adalah pola campuran bintik-bintik dan garis-garis. Garis-garis pada pola tersebut merupakan beberapa bintik-bintik yang menyatu. Artinya, area di antara bintik-bintik yang awalnya berkepadatan individu terinfeksi rendah mengalami peningkatan akibat nilai  $\xi_2$  yang lebih besar. Ketika individu terinfeksi bergerak ke area yang lebih padat individu rentan semakin cepat (yang direpresentasikan oleh nilai  $\xi_2$  yang semakin

besar) maka terbentuk pola garis-garis yang menunjukkan bahwa wabah telah menyebar pada area yang lebih luas lagi seperti yang tampak pada Gambar 4.41 (c).

Wabah terus menyebar ke area yang lebih luas ketika nilai  $\xi_2$  terus membesar sehingga domain spasial mulai didominasi oleh warna kuning seperti yang tampak pada Gambar 4.41 (d) dan 4.41 (e). Pola lubang-lubang seperti Gambar 4.41 (e) menunjukkan kondisi yang paling buruk dari kelima pola yang ada. Jika pada pola titik-titik wabah hanya terlokalisasi pada area tertentu maka pada pola lubang-lubang menunjukkan kondisi sebaliknya. Gambar 4.41 (e) menunjukkan wabah terjadi hampir di seluruh area pada suatu wilayah dan hanya terdapat beberapa area yang terisolasi dari wabah. Dengan kata lain, pola lubang-lubang mengindikasikan bahwa wabah terjadi secara spasial, sedangkan pola titik-titik mengindikasikan situasi yang relatif aman karena wabah hanya terlokalisasi pada area-area tertentu pada suatu wilayah.

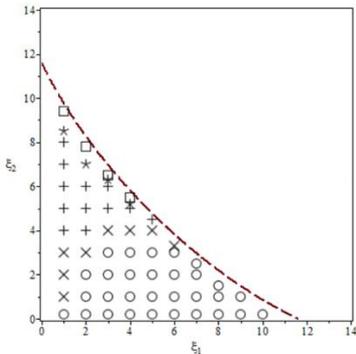
Hasil ketiga, hasil analisis *multiple-scale* pada Persamaan Amplitudo dapat menjustifikasi kemunculan dan kestabilan lima pola-pola yang diperoleh melalui simulasi numerik. Secara singkat, bentuk pola dan kestabilan solusi kesetimbangan persamaan amplitudo dirangkum pada Tabel 4.7.

**Tabel 4.7** Keberadaan dan kestabilan solusi kesetimbangan persamaan amplitudo [Sumber: artikel penulis].

Bentuk Solusi Kesetimbangan	Solusi Kesetimbangan	Syarat Keberadaan	Syarat Kestabilan
Homogen (tidak ada pola)	$(0,0,0)$	selalu ada	$\mu < \mu_2 = 0$ stabil $\mu > \mu_2 = 0$ tidak stabil
Garis-garis	$(\sqrt{\frac{\mu}{q_1}}, 0, 0)$	$\mu > 0$	$\mu > \mu_3$ stabil $\mu < \mu_3$ tidak stabil
Hexagonal $(H_0, H_\pi)$	$(\rho_0, \rho_0, \rho_0)$ $\rho_0^+ = \frac{ q_0  + \sqrt{q^2 + 4(q_1 + 2q_2)\mu}}{2(q_1 + 2q_2)}$ $\rho_0^- = \frac{ q_0  - \sqrt{q^2 + 4(q_1 + 2q_2)\mu}}{2(q_1 + 2q_2)}$	$\mu > \mu_1$	$\rho_0^+$ : $\mu < \mu_4$ stabil $\rho_0^-$ : selalu tidak stabil
Campuran	$(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ $\rho_1 = \frac{ q_0 }{q_2 - q_1}$ $\rho_2 = \rho_3 = \sqrt{\frac{\mu - q_1 \rho_1^2}{q_1 + q_2}}$	$q_2 > q_1$ $\mu > q_1 \rho_1^2$	selalu tidak stabil

Hasil keempat, hasil simulasi numerik yang intensif menunjukkan bahwa semakin besar nilai bifurkasi Turing  $\xi_2$  maka pola-pola yang terbentuk

mengarah pada pola lubang-lubang. Hal ini disebabkan oleh semakin tinggi pergerakan individu terinfeksi ke daerah padat individu rentan maka semakin cepat meluasnya penyebaran wabah secara spasial. Sebaran kemunculan pola-pola yang muncul dalam ruang Turingnya ditampilkan pada Gambar 4.42.



**Gambar 4.42** Lokasi kemunculan lima tipe pola Turing dengan parameter  $d = 0.05$ ,  $\gamma = 2500$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\alpha = 0.545$ , dan berbagai nilai  $\xi_1$  dan  $\xi_2$ . Tanda  $\circ, \times, +, *$ , dan  $\square$  masing-masing mewakili pola bintik-bintik, campuran bintik dan garis, garis-garis, campuran garis dan lubang-lubang, serta lubang-lubang [Sumber: artikel penulis].

**Kesimpulan:** Jika dilihat dari sudut pandang epidemiologi, pola Turing memberikan informasi tentang distribusi sebaran individu rentan dan terinfeksi untuk melihat wabah penyakit secara spasial. Secara biologis, model dalam penelitian ini mempunyai dua pola penting, yaitu pola bintik-bintik dan lubang-lubang. Pola lubang-lubang menandakan situasi wabah penyakit yang menyebar luas pada suatu wilayah, sedangkan pola bintik-bintik menunjukkan bahwa wabah hanya terjadi pada area tertentu saja. Wabah yang terjadi secara meluas pada suatu wilayah dipicu oleh pergerakan individu terinfeksi ke area yang lebih padat individu rentan. Wabah dapat dicegah dengan membatasi pergerakan individu terinfeksi dengan menetapkan nilai yang kecil pada koefisien difusi silang dari individu terinfeksi. Hal tersebut dapat mengubah pola lubang-lubang menjadi bintik-bintik yang mengindikasikan tidak terjadinya wabah pada suatu wilayah. Hasil penelitian ini menegaskan secara ilmiah bahwa selain tindakan medis seperti pemberian vaksin, dalam situasi pandemi sangat penting untuk melakukan pembatasan pergerakan individu terinfeksi. Pembatasan pergerakan tersebut dapat dilakukan melalui beberapa kebijakan seperti karantina. Selain itu, ketika individu rentan juga memiliki kesadaran untuk

menghindar dari individu terinfeksi maka dapat membantu memutus rantai penyebaran suatu penyakit menular.

#### 4.12 Deteksi Pencilan Menggunakan Algoritma PCA Rekursif Termodifikasi untuk Data Aliran Dinamis.

**Sumber:** Y. Dani, A.Y. Gunawan, M.L Khodra, S.W. Indratno, *Detecting Outliers Using Modified Recursive PCA Algorithm for Dynamic Streaming Data*, MENDEL 29 (2), 2023.

**Pendahuluan:** Pencilan adalah observasi yang sangat menyimpang dari observasi lain sehingga menimbulkan kecurigaan bahwa observasi tersebut dihasilkan oleh mekanisme yang berbeda. Dalam mendeteksi pencilan terdapat dua teknik pendeteksian pencilan, yaitu deteksi pencilan terawasi (*supervised*) berdasarkan klasifikasi atau regresi dan deteksi pencilan tanpa pengawasan (*unsupervised*) berdasarkan klustering. Di era digital, pengenalan sistem teknologi sangatlah penting karena saat ini sudah memasuki sebuah era baru yaitu era *big data*. *Big data* adalah data dalam skala besar dari segi volume, intensitas, dan kompleksitasnya yang melebihi kapasitas alat analisis standar. Sebaiknya dibangun algoritma yang tepat agar data dapat dikelola dengan baik dan efisien.

*Online learning*, juga dikenal sebagai pembelajaran inkremental, adalah metode pembelajaran mesin yang membangun model yang dapat dipelajari untuk klasifikasi efektif dalam deteksi waktu nyata. Sedangkan *offline learning* merupakan teknik pembelajaran mesin tradisional yang membutuhkan waktu dan waktu komputasi yang besar untuk memproses semua data. Hal ini kemudian memerlukan pembaruan model secara manual pada data baru yang muncul dan menerapkan model yang dihasilkan setiap kali perilaku sistem normal berubah. Algoritma *online* dapat menggunakan semua informasi yang tersedia tanpa menyimpan atau meninjau kembali titik data awal.

Menurut (Jolliffe, 2002), *Principal Component Analysis* (PCA), adalah salah satu teknik analisis multivariat tertua dan paling terkenal. Metode PCA ini diterapkan terutama untuk mereduksi dimensi kumpulan data dengan memproyeksikan setiap titik data ke dalam beberapa komponen utama pertama untuk mendapatkan data berdimensi lebih kecil sambil mempertahankan sebanyak mungkin variasi yang ada dalam kumpulan data.

Untuk mengidentifikasi pencilan, sebuah ukuran yang menggunakan jarak Mahalanobis akan digunakan. Jarak ini cukup baik untuk digunakan pada data-data yang berkorelasi satu sama lainnya.

**Tujuan penelitian:** Penelitian yang dilakukan akan mengusulkan algoritma deteksi pencilan *online* untuk mengidentifikasi pencilan dengan jarak Mahalanobis menggunakan PCA rekursif yang dimodifikasi di mana pencilan diidentifikasi segera setelah catatan data baru muncul dalam kumpulan data. Secara eksplisit, struktur eigen rekursif dihitung dari matriks kovariansi menggunakan teknik perturbasi orde pertama. Untuk skor deteksi pencilan, jarak Mahalanobis diterapkan. Kemudian, kinerja algoritma dievaluasi dalam hal efektivitas dan efisiensi menggunakan beberapa metrik, yaitu akurasi, presisi, *recall*, *F1-score*, AUC-PR, dan waktu eksekusi. Penelitian ini menerapkan algoritma deteksi pencilan online ini ke beberapa kumpulan data sintetis.

**Model Matematika:** Diberikan vektor data  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n+1} \in \mathbb{R}^p$ . Formula mean rekursif dihitung sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\mu}_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{x}_i = \frac{n}{n+1} \boldsymbol{\mu}_n + \frac{1}{n+1} \mathbf{x}_{n+1}. \quad (4.12.1)$$

Untuk matriks kovariansi langkah ke- $(n+1)$  yang berukuran  $p \times p$ ,  $\mathbf{C}_{n+1}$ , rumus rekursif diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_{n+1})(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_{n+1})^T \\ &= \mathbf{C}_n + \frac{1}{n+1} \left[ \frac{n}{n+1} (\mathbf{x}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_n)^T - \mathbf{C}_n \right] \end{aligned} \quad (4.12.2)$$

Pada Persamaan (4.12.2) kita telah mengganti  $\boldsymbol{\mu}_{n+1}$  yang diberikan oleh Persamaan (4.12.1). Misalkan  $\varepsilon = 1/(n+1)$ . Persamaan (4.12.2) dapat ditulis ulang menjadi

$$\mathbf{C}_{n+1} = \mathbf{C}_n + \varepsilon \mathbf{B} \quad , \quad (4.12.3)$$

dengan  $\mathbf{B} = \frac{n}{n+1}(\mathbf{x}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_n)^T - \mathbf{C}_n$ . Untuk  $\varepsilon$  kecil (atau  $n$  besar),  $\mathbf{C}_n$  dapat dipandang terganggu oleh matriks  $\mathbf{B}$ . Selanjutnya, persamaan nilai eigen untuk  $\mathbf{C}_{n+1}$  diberikan oleh

$$\mathbf{C}_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} \Rightarrow (\mathbf{C}_n + \varepsilon \mathbf{B}) \mathbf{v}_{n+1} = \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} \quad (4.12.4)$$

di mana  $(\lambda_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1})$  adalah pasangan eigen dari  $\mathbf{C}_{n+1}$ . Pada pembahasan selanjutnya kita asumsikan bahwa terdapat  $p$  nilai eigen yang berbeda. Kita menyatakan pasangan eigen ke- $j$  dari  $\mathbf{C}_n$  dengan  $(\lambda_{j,n}, \mathbf{v}_{j,n})$  dengan  $j = 1, 2, 3, \dots, p$ . Perluasan asimtotik orde pertama untuk  $\lambda_{j,n+1}, \mathbf{v}_{j,n+1}$  dapat ditulis sebagai

$$\lambda_{j,n+1}(\varepsilon) = \lambda_{j,n} + \varepsilon \lambda_{1j,n} \quad \text{dan} \quad \mathbf{v}_{j,n+1}(\varepsilon) = \mathbf{v}_{j,n} + \varepsilon \mathbf{v}_{1j,n} \quad (4.12.5)$$

dengan

$$\lambda_{1j} = \frac{\langle \mathbf{B} \mathbf{v}_{j,n}, \mathbf{v}_{j,n} \rangle}{\langle \mathbf{v}_{j,n}, \mathbf{v}_{j,n} \rangle} \quad \text{dan} \quad \mathbf{v}_{1j,n} = \sum_{k \neq j}^p \frac{\langle \mathbf{v}_{k,n}, \mathbf{B} \mathbf{v}_{j,n} \rangle}{(\lambda_{j,n} - \lambda_{k,n}) \langle \mathbf{v}_{j,n}, \mathbf{v}_{j,n} \rangle} \mathbf{v}_{k,n} + \beta \mathbf{v}_{j,n},$$

dan  $\beta$  adalah konstanta sembarang. Lebih jauh lagi, dalam ekspresi parameter ke- $n$ , Persamaan (4.12.5) dapat ditulis ulang menjadi

$$\lambda_{j,n+1} \approx \lambda_{j,n} + \frac{1}{n+1} \left( \frac{n}{n+1} \phi_{j,n}^2 - \lambda_{j,n} \right), \quad (4.12.6)$$

$$\mathbf{v}_{j,n+1} \approx \mathbf{v}_{j,n} + \frac{1}{n+1} \left( \sum_{k \neq j} \frac{\frac{n}{n+1} \phi_{k,n} \phi_{j,n}}{(\lambda_{j,n} - \lambda_{k,n}) \langle \mathbf{v}_{j,n}, \mathbf{v}_{j,n} \rangle} \mathbf{v}_{k,n} + \beta \mathbf{v}_{j,n} \right), \quad (4.12.7)$$

dengan  $\phi_{j,n} = (\mathbf{x}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_n)^T \mathbf{v}_{j,n}$ ,  $\phi_{k,n} = \mathbf{v}_{k,n}^T (\mathbf{x}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_n)$ .

Jarak Mahalanobis (Mahalanobis, 1930) sebagai skor pencilan suatu titik data  $\mathbf{x}$  dapat ditentukan oleh

$$\text{score}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^p \frac{|(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \mathbf{v}_j|^2}{\lambda_j} \quad (4.12.8)$$

Struktur eigen diberikan oleh Persamaan (4.12.6) dan (4.12.7). Pencilan harus memenuhi kondisi berikut:

$$\text{score}(\mathbf{x}) > \sqrt{\chi^2_{d,1-\alpha}},$$

di mana  $\chi$  adalah distribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan  $d$  dan  $(1-\alpha)\%$  tingkat signifikansi.

---

**Algorithm 1:** Online Outlier Detection Algorithm  
via Modified Recursive PCA

---

**Input:** a data matrix  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$

- 1 **Initialization:**
- 2  $\boldsymbol{\mu}_n \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$
- 3  $\mathbf{C}_n \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_n)(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_n)^T$
- 4  $\lambda_{j,n}$  and  $\mathbf{v}_{j,n}$  of  $\mathbf{C}_n$  with  $j = 1, 2, 3, \dots, p$
- 5 **for**  $n + 1$  **to** final **do**
- 6      $\phi_{j,n} \leftarrow (\mathbf{x}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_n)^T \mathbf{v}_{j,n}$
- 7      $\lambda_{j,n+1} \leftarrow \lambda_{j,n} + \frac{1}{n+1} \left( \frac{n}{n+1} \phi_{j,n}^2 - \lambda_{j,n} \right)$
- 8      $\phi_{k,n} \leftarrow (\mathbf{x}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_n)^T \mathbf{v}_{k,n}$
- 9      $\mathbf{v}_{j,n+1} \leftarrow \mathbf{v}_{j,n} + \frac{1}{(n+1)} \sum_{k \neq j} \frac{\frac{n}{n+1} \phi_{k,n} \phi_{j,n}}{\lambda_{j,n} - \lambda_{k,n}} \mathbf{v}_{k,n}$
- 10     $\mathbf{v}_{j,n+1} \leftarrow \frac{\mathbf{v}_{j,n+1}}{\|\mathbf{v}_{j,n+1}\|}$
- 11     $\boldsymbol{\mu}_{n+1} \leftarrow \frac{n}{n+1} \boldsymbol{\mu}_n + \frac{1}{n+1} \mathbf{x}_{n+1}$
- 12     $\text{score}(\mathbf{x}_{n+1}) \leftarrow \sum_{j=1}^p \frac{|(\mathbf{x}_{n+1} - \boldsymbol{\mu}_{k+1}) \cdot \mathbf{v}_{j,n+1}|^2}{\lambda_{j,n+1}}$
- 13    **if**  $\text{score}(\mathbf{x}_{n+1}) > \sqrt{\chi^2_{d,1-\alpha}}$  **then**
- 14        outlier detected
- 15        record outlier with label 1
- 16        **else**
- 17            record inlier with label 0
- 18        **end if**
- 19    **end if**
- 20 **end for**

**Output:** binary classification

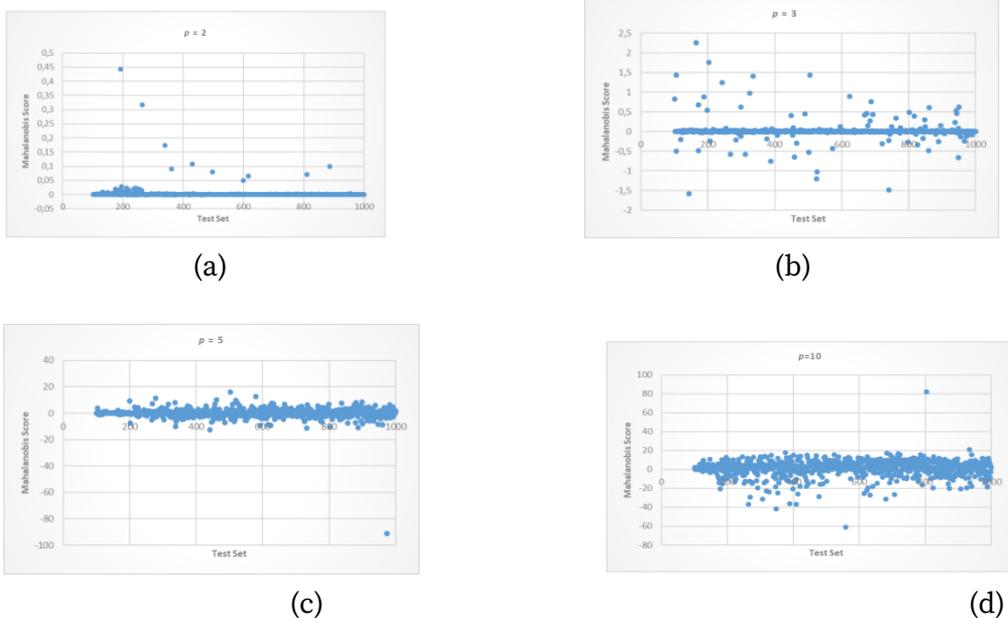
---

**Gambar 4.43** Algoritma deteksi pencilan online [Sumber: artikel penulis].

**Metode solusi:** Untuk mendeteksi pencilan secara *online* melalui PCA termodifikasi, sebuah algoritma akan dibangun. Simulasi akan dilakukan menggunakan Python. Model yang dibangun terbatas untuk kasus dengan perubahan data pada matriks kovariansi tidak terlalu besar. Hal ini memungkinkan untuk menggunakan teknik perturbasi pada saat mencari pasangan eigen dari matriks kovariansi. Penggunaan teknik perturbasi ini yang melahirkan istilah PCA termodifikasi. Gambar 4.43 menjelaskan algoritma yang dibangun. Dalam algoritma ini dijelaskan bagaimana

parameter ini diperbarui dan bagaimana pencilan diidentifikasi pada setiap langkah data baru.

**Hasil:** Eksperimen dilakukan pada beberapa kumpulan data sintetis. Kumpulan data sintetis kami memiliki jumlah titik data yang sama dengan yang dibuat dengan algoritma klasifikasi pembuatan modul scikit-learn. Kami membuat kumpulan data sintetis untuk mensimulasikan masalah klasifikasi dua kelas dengan 1000 sampel (100 sampel data latih dan 900 sampel data uji) dengan jumlah fitur berbeda ( $p = 2, 3, 5, 10$ ) diambil secara acak mengikuti distribusi Normal standar, yaitu  $N(0,1)$  dan satu variabel terikat biner  $y \in Y = \{0, 1\}$  sebagai kelas dari titik data, distribusi kedua kelas yang ditentukan oleh  $Y$  (*imbalanced data*), yaitu proporsi observasi  $y = 0$  adalah 99% dan  $y = 1$  adalah 1% tanpa variabel redundan dalam kumpulan data. Kemudian, kami membandingkan hasil jarak Mahalanobis sebagai skor pencilan dan mengevaluasi kinerja algoritma melalui PCA rekursif yang dimodifikasi (algoritma *online*) dan PCA klasik (algoritma *offline*) sehubungan dengan informasi pencilan kebenaran dasar (*ground-truth*). Dalam simulasi setiap titik data uji pada algoritma deteksi pencilan *offline*, seluruh data latih dan data uji sebelumnya tetap digunakan.



**Gambar 4.44** Plot selisih skor Mahalanobis untuk: (a) 2 Fitur, (b) 3 Fitur, (c) 5 Fitur, dan (d) 10 Fitur [Sumber: artikel penulis].

Simulasi menyajikan plot selisih skor Mahalanobis pada sumbu- $y$  yang diperoleh dari hasil algoritma online dan offline terhadap dataset pengujian pada sumbu- $x$ . Nilai tersebut diperoleh dari hasil pengurangan skor Mahalanobis menggunakan metode PCA rekursif yang dimodifikasi dengan metode PCA klasik. Semua plot menampilkan perbedaan skor Mahalanobis yang mendekati nol untuk beberapa fitur meskipun ada sedikit penyebaran di beberapa titik uji. Khususnya pada fitur 2, 3, dan 5 (Gambar 4.44 (a)-(c)) bahwa selisih nilai skor Mahalanobis mendekati nol. Sedangkan 10 fitur pada Gambar 4.44 (d) menunjukkan bahwa skor Mahalanobis sedikit berbeda dari nol, tetapi masih konvergen di sekitar nol.

Tabel 4.8 menyajikan perbandingan hasil kinerja algoritma deteksi pencilan *online* dan *offline* pada data uji yang diberikan. Nilai akurasi dan presisi kedua algoritma sangat memuaskan karena nilainya lebih dari 0,90, maka akurasi kedua algoritma sama, hanya presisinya sedikit berbeda pada 5 fitur di mana presisi algoritma *offline* sedikit lebih baik. *Recall* dan *F1-score* kedua algoritma sudah cukup baik di mana nilainya berada pada kisaran [0.50,0.83], hanya terdapat perbedaan pada fitur 5 dan 10 di mana *recall* dan *F1-score* algoritma *online* sebanding dengan algoritma *offline*. *AUC-PR* kedua algoritma juga memuaskan karena nilainya lebih dari 0,75, hanya terdapat perbedaan fitur 5 dan 10 di mana *AUC-PR* algoritma *offline* sedikit lebih baik. Kemudian waktu eksekusi algoritma *online* selalu lebih cepat dibandingkan algoritma *offline* untuk setiap fiturnya. Secara keseluruhan terlihat bahwa efektivitas kedua algoritma tersebut sedikit menurun seiring dengan bertambahnya fitur, efektivitas algoritma online sebanding dengan algoritma *offline*, dan efisiensi algoritma *online* adalah yang paling unggul.

**Tabel 4.8** Perbandingan kinerja dari algoritma deteksi pencilan offline dan online [Sumber: artikel penulis].

The number of Features ( $p$ ):		2	3	5	10
Accuracy (100%)	Offline Algorithm	1.000	1.000	1.000	0.990
	Online Algorithm	1.000	1.000	1.000	0.990
Precision	Offline Algorithm	1.000	1.000	1.000	1.000
	Online Algorithm	1.000	1.000	0.910	1.000
Recall	Offline Algorithm	0.710	0.710	0.690	0.640
	Online Algorithm	0.710	0.710	0.770	0.500
F1-score	Offline Algorithm	0.830	0.830	0.820	0.780
	Online Algorithm	0.830	0.830	0.830	0.670
AUC-PR	Offline Algorithm	0.859	0.859	0.848	0.824
	Online Algorithm	0.859	0.859	0.841	0.754
Time (second)	Offline Algorithm	0.461	0.480	1.082	1.574
	Online Algorithm	0.300	0.414	0.726	1.286

**Kesimpulan:** Pada penelitian ini telah dibangun algoritma *online* untuk mengidentifikasi pencilan pada aliran data yang mengalir secara dinamis. Penelitian ini menerapkan strategi skema rekursif yang memprediksi model iteratif untuk memperbarui parameter dalam model ketika data baru muncul dan mendeteksi pencilan. Dengan kata lain, skema berulang memainkan peran penting dalam aliran data. Algoritma *online* ini mengidentifikasi pencilan dengan jarak Mahalanobis menggunakan PCA rekursif yang dimodifikasi. Kesimpulannya, penelitian ini menunjukkan bahwa dari segi efektivitas kinerja algoritma *online* sebanding dengan algoritma *offline* dan dari segi efisiensi, kemudian dari segi efisiensi kinerja algoritma *online* mengungguli algoritma *offline*.

#### 4.13 Analisis Aktivitas Seismik di Lima Sumber Gempa Bumi Pada Zona Megathrust Sumatra

**Sumber:** J. Rizal, A.Y. Gunawan, S.W. Indratno, I. Meilano, *Seismic activity analysis of five major earthquake source segments in the Sumatra megathrust zone: Each segment and two adjacent segments points of view*, Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering, 2023, <https://doi.org/10.5459/bnzsee.1555>.

**Pendahuluan:** “*Can earthquakes be predicted?*” Untuk menjawabnya, (Hall-Wallace, 1998) menggunakan dua teori yang berkaitan dengan fenomena terjadinya gempa bumi, yakni teori kekenyalan elastis (*elastic rebound theory*) (Reid, 1910) dan teori mekanisme gerakan lempeng tektonik (Wegener, 1966) yang merepresentasikan “proses takteramati” di bawah permukaan bumi. Pada perkembangannya, kedua teori yang digunakan oleh (Hall-Wallace, 1998) menjadi pondasi bagi banyak peneliti kegempaan dalam memodelkan kejadian gempa bumi (proses teramati). Namun demikian, (Powell dan Duda, 1975) menyatakan bahwa metode observasi secara konvensional tidak cukup representatif untuk digunakan dalam pemodelan kejadian gempa bumi yang bersifat kompleks. Hal ini dikarenakan, belum ditemukan teknologi yang mampu menangkap secara langsung manifestasi dari dinamika lempeng tektonik secara tepat dan presisi. Dengan ungkapan lain, terdapat data hilang dari pasangan dataset yang akan dikonstruksi model peluangnya, yakni pada aspek dinamika lempeng tektonik. Di sinilah ilmu matematika sangat berperan, khususnya bidang pemodelan matematika, untuk

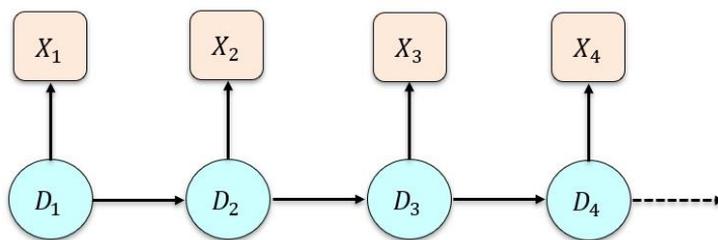
memformulasikan model peluang dari kedua proses tersebut dengan kendala adanya data hilang pada pasangan data kegempaan yang akan dimodelkan.

Peneliti-peneliti rekayasa kegempaan yang mengkaji hubungan dari kejadian gempa bumi dan dinamika lempeng tektonik di antaranya adalah (Chambers dkk., 2012; Orfanogiannaki dkk., 2010; Can dkk., 2014; Orfanogiannaki dkk., 2014; Yip dkk., 2018). Secara ringkas, terdapat beberapa catatan yang diperoleh berdasarkan hasil *review* kelima artikel tersebut. *Catatan pertama* berkaitan dengan data kegempaan yang digunakan, yakni proses kejadian gempa bumi (proses teramati) direpresentasikan dengan data kegempaan berupa frekuensi gempa bumi yang berkekuatan  $M_w \geq M_c$  (*Magnitude of Completeness*), sedangkan proses dinamika lempeng tektonik (proses takteramati) direpresentasikan dalam bentuk kategori atau tingkatan, seperti: berdinamika rendah, sedang, tinggi, atau kategori lain. *Catatan kedua* berkaitan dengan model peluang yang diaplikasikan, yakni model campuran (*mixture models*) dari distribusi Poisson dengan Model Markov Tersembunyi (MMT), ditulis dengan Poisson-MMT. Model MMT diaplikasikan untuk proses parameter dari ruang keadaannya takteramati (*unobserved*) yang diasumsikan memenuhi sifat Markov, sedangkan distribusi Poisson diaplikasikan untuk proses yang bergantung (*state-dependent process*) pada keadaan takteramati yang ruang keadaannya dapat diamati (Zucchini dkk., 2016). *Catatan ketiga* berkaitan dengan algoritma yang digunakan untuk estimasi parameter model Poisson MMT adalah algoritma EM (*Expectation-Maximization algorithm*) (Dempster dkk., 1977). *Catatan keempat* berkaitan dengan batas kekuatan magnitudo gempa bumi yang digunakan dalam menghitung frekuensi dari gempa bumi. Batas kekuatan magnitudo ini ditentukan berdasarkan suatu nilai tertentu, yakni nilai  $M_c$  dari data katalog yang dipilih dan wilayah yang dijadikan objek penelitian.

**Tujuan penelitian:** Tujuan umum dari penelitian ini adalah menghasilkan model peluang sesuai dengan konteks dari masalah yang dikaji. Model tersebut dikelompokkan dalam dua kelompok, yakni model peluang frekuensi gempa bumi untuk masing-masing segmen (kasus pertama) dan model peluang bersama frekuensi gempa bumi untuk dua segmen berdekatan (kasus kedua). Kedua model peluang tersebut digunakan sebagai dasar dalam menganalisis aktivitas seismik di wilayah yang menjadi objek penelitian. Pada penelitian ini objek penelitian adalah zona megathrust Sumatra yang memuat lima sumber gempa besar, yakni segmen Aceh Andaman (AA), segmen Nias

Simeuleu (NS), segmen Mentawai Siberut (MS), segmen Mentawai Pagai (MP), dan segmen Enggano (EO).

**Model Matematika.** Model Markov Tersembunyi (MMT) merupakan model matematika yang memuat dua proses stokastik. Bagian pertama merupakan proses parameter dengan ruang keadaan tersembunyi (takteramati) yang diasumsikan memenuhi sifat Markov, dinotasikan dengan  $D_t$ . Bagian kedua merupakan proses yang bergantung dari keadaan tersembunyi (*state dependent process*). Ruang keadaan dari proses yang dapat diamati ( $X_t$ ), di mana distribusi dari  $X_t$  hanya bergantung pada  $D_t$  tidak bergantung pada  $X_{t-1}$ . Secara visual, diagram MMT direpresentasikan pada Gambar 4.45 (Zucchini dkk., 2016).



**Gambar 4.45** Diagram berarah Model Markov Tersembunyi (diadaptasi dari Zucchini dkk., 2016).

Misalkan  $x^{(t)}$  dan  $d^{(t)}$  secara berurutan menyatakan nilai realisasi dari  $X^{(t)}$  dan  $D^{(t)}$  untuk waktu 1 sampai waktu ke- $t$  maka Model Markov Tersembunyi  $X_t$  dengan proses parameter  $D_t$  dapat dinyatakan dalam dua bagian sebagai berikut:

1. Proses yang takteramati dari  $D_t$ , proses ini memenuhi sifat Markov, yakni

$$P(D_t | D^{(t-1)} = d^{(t-1)}) = P(D_t | D_{t-1} = d_{t-1}), t = 2, 3, \dots \quad (4.13.1)$$

2. Proses yang bergantung dari keadaan yang tersembunyi  $X_t$ , dengan ketentuan distribusi  $X_t$  bergantung pada keadaan sekarang dari  $D_t$ , dapat dituliskan:

$$P(X_t | X^{(t-1)} = x^{(t-1)}, D^{(t)} = d^{(t)}) = P(X_t | D_t = d_t), t \in \mathbb{N} \quad (4.13.2)$$

Jika rantai Markov dari proses  $D_t$  memiliki  $N$  keadaan, maka proses  $X_t$  mengikuti model  $N$ -keadaan MMT yang terdiri atas tiga parameter yang perlu diestimasi, yakni  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , dan  $\boldsymbol{\pi}$ . Untuk selanjutnya, himpunan ketiga parameter tersebut dinotasikan dengan  $\omega = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi})$ . Sebagai keterangan, Parameter  $\mathbf{A}$

merupakan matriks peluang transisi berukuran  $N \times N$  yang menyatakan peluang transisi dari keadaan tersembunyi ke- $i$  ke keadaan tersembunyi ke- $j$ , dengan jumlah elemen-elemen pada setiap baris di matriks  $A$  berjumlah 1; Parameter  $B$  merupakan matriks peluang emisi berukuran  $N \times M$  yang menyatakan peluang keadaan ke- $i$  berada pada keadaan terobservasi ke- $t$ , dengan jumlah elemen-elemen pada setiap baris dari matriks  $B$  bernilai 1; Parameter  $\pi$  merupakan vektor berukuran  $N \times 1$  dengan elemen elemennya menyatakan peluang awal dari keadaan tersembunyi ke- $i$ , dengan jumlah elemen baris pada vektor  $\pi$  bernilai 1.

Agar MMT dapat diaplikasikan pada permasalahan nyata, terdapat tiga masalah dasar dalam MMT yang harus diselesaikan, yakni:

1. *Evaluation problem*: Pada tahap ini akan dihitung  $P(X^{(T)}|\omega)$ , yaitu peluang dari suatu barisan observasi jika diberikan barisan observasi  $X^{(T)}$  dan parameter  $\omega$ . Bagian ini diperlukan untuk memilih salah satu model terbaik dari antara beberapa model yang sesuai dengan barisan observasinya.
2. *Decoding problem*: Pada tahap ini akan ditentukan barisan keadaan takteramati  $D^{(T)}$  untuk suatu barisan observasi  $X^{(T)}$  dan parameter  $\omega$  yang diberikan.
3. *Learning problem*: Pada tahap ini akan dilakukan estimasi parameter  $\omega$  sedemikian sehingga  $P(X^{(T)}|\omega)$  maksimum.

Dalam menyelesaikan tiga masalah MMT, terdapat dua asumsi yang diperlukan, yaitu:

1. Asumsi Markov: Untuk waktu sembarang  $t$ , peluang keadaan pada satu satuan waktu berikutnya hanya bergantung pada keadaan waktu sekarang, yakni

$$P(D_{t+1}|D^{(t)}) = P(D_{t+1}|D_t). \quad (4.13.3)$$

2. Asumsi Independensi/Kebebasan: Distribusi peluang dari suatu barisan observasi  $X^{(T)}$  pada suatu waktu  $t$  hanya bergantung pada barisan keadaan  $D^{(T)}$  pada waktu yang sama. Secara formal dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P(X^{(T)}|D^{(T)}, \omega) = \prod_{t=1}^T P(X_t|D_t, \omega). \quad (4.13.4)$$

Distribusi yang digunakan untuk proses teramati disesuaikan dengan sebaran dari peubah acak yang dimodelkan. Untuk kasus pertama, model peluang yang digunakan adalah distribusi Poisson. Misalkan  $X_t$  merupakan

peubah acak yang mengikuti distribusi Poisson dengan paramater  $\lambda_t > 0$ , ditulis  $X_t \text{ Poi}(\lambda_t)$ , maka fungsi peluang dari  $X_t$  dituliskan sebagai berikut:

$$p(x_t; \lambda_t) = \frac{e^{(-\lambda_t)} (\lambda_t)^{x_t}}{x_t!}, \quad x_t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13.5)$$

Untuk kasus kedua, model bivariat yang digunakan adalah beberapa model peluang dari keluarga model Copula, yakni Copula Gaussian, Copula  $t$ , Copula Clayton, Copula Gumbel, dan Copula Frank. Penjelasan singkat dari masing-masing model dapat dilihat pada Tabel 4.9.

**Tabel 4.9** Formula dan informasi dari keluarga Copula Archimedean dan Copula Elliptic [Sumber: artikel penulis].

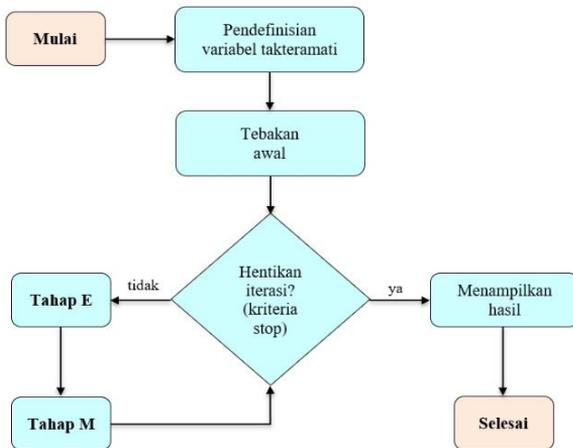
Model Copula	$C(u_1, u_2; \theta)$	Generator $\phi(t; \theta)$	Range dari Parameter ( $\theta$ )	Kendall's tau
Clayton	$(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$	$\theta^{-1}(t^{-\theta} - 1)$	$(0, \infty)$	$\frac{\theta}{\theta + 2}$
Gumbel Hougaard	$\exp\left(-(\tilde{u}_1^\theta + \tilde{u}_2^\theta)^{1/\theta}\right);$ $\tilde{u}_j = -\log u_j$	$(-\log t)^\theta$	$[1, \infty)$	$\frac{\theta - 1}{\theta}$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \log\left(1 + \frac{u_1^* u_2^*}{\exp(-\theta) - 1}\right);$ $u_j^* = e^{(-\theta u_j - 1)}$	$-\log\left(\frac{\exp(-\theta t) - 1}{\exp(-\theta) - 1}\right)$	$(-\infty, \infty)$	$1 - \frac{4}{\theta} [1 - D_1(\theta)]$
Joe	$1 - [u_1^* + u_2^* - u_1^* u_2^*]^{1/\theta};$ $u_j^* = (1 - u_j)^\theta$	$-\log(1 - (1 - t)^\theta)$	$[1, \infty)$	$1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{h(\theta, k)}$
Gaussian	$\Phi_G[\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \theta]$	n/a	$(-1, 1)$	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\theta)$
Student's	$t_{2,\nu}[t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2); \theta];$ $\nu \in (2, \infty)$	n/a	$[-1, 1]$	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\theta)$

Notes: 1. The quantity  $D_1$  is the Debye function of order one, defined by  $D_1(x) = 1/x \int_0^x t/(e^t - 1) dt$ ,  $t \in (0, \infty)$ , 2.  $h(\theta, k) = (k(\theta k + 2)(\theta(k - 1) + 2))$ , and 3. n/a denotes that the mentioned item is not available.

**Metode solusi:** Algoritma yang digunakan dalam menyelesaikan tiga masalah dasar dari MMT dapat diuraikan sebagai berikut. Untuk *evaluation problem* dapat diselesaikan dengan menggunakan algoritma Maju (*Forward algorithm*) atau algoritma Mundur (*Backward algorithm*), untuk *decoding problem* dapat diselesaikan menggunakan algoritma Viterbi, dan untuk *learning problem* algoritma yang digunakan adalah algoritma Baum-Welch (Dymarski, 2011). Khusus untuk algoritma Baum-Welch, algoritma tersebut merupakan kasus khusus dari algoritma Ekspektasi-Maksimisasi (EM) yang pada tahap implementasinya juga melibatkan perhitungan algoritma Maju dan Mundur (Zucchini dkk., 2016).

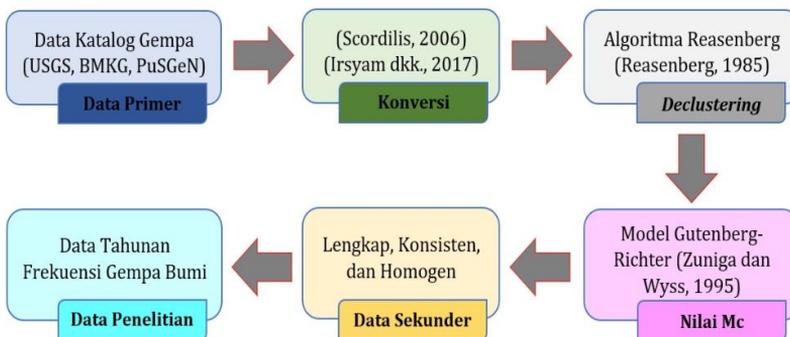
Algoritma Ekspektasi-Maksimisasi (EM) merupakan salah satu dari metode optimisasi iteratif yang dapat digunakan untuk mengestimasi

parameter dari suatu model (peluang) melalui penaksir *Maksimum Likelihood* (ML) dengan melibatkan data yang tidak lengkap (*incomplete data*). Dalam setiap iterasinya, terdapat dua tahap yang dikerjakan, yakni tahap Ekspektasi (tahap E) dan tahap Maksimisasi (tahap M) (Dempster dkk., 1977), seperti pada Gambar 4.46.



**Gambar 4.46** Diagram alur dari algoritma EM. Diagram tersebut diadaptasi dari <https://www.indowhiz.com/> diakses pada tanggal 24 Juni 2020.

**Hasil:** Data kegempaan yang digunakan pada penelitian ini merupakan nilai realisasi dari peubah acak  $X^{(t)}$ , yaitu data frekuensi gempa bumi utama (*mainshock*) yang bermagnitudo  $M_w \geq M_c$  dengan kedalaman 70 km (kategori gempa bumi dangkal) dari masing-masing segmen. Untuk mendapatkan data kegempaan tersebut, diperlukan tahap persiapan data kegempaan mengikuti prosedur yang pada Gambar 4.47.



**Gambar 4.47** Alur dari proses persiapan data.

Analisis aktivitas seismik dapat dilakukan berdasarkan karakteristik dari perilaku dinamika lempeng tektonik yang dapat diidentifikasi berdasarkan model N-keadaan Poisson-MMT yang terpilih (Chambers dkk., 2012; Can dkk., 2014; Orfanogiannaki dkk., 2014; Yip dkk., 2017). Oleh karena itu, parameter-parameter model peluang untuk penyelesaian **kasus pertama** dari masing-masing segmen seperti: vektor parameter fungsi peluang marginal, distribusi keadaan stasioner, waktu untuk mencapai keadaan stasioner, dan matriks peluang keadaan transisi, dapat digunakan untuk mendeskripsikan kekhasan dari aktivitas seismik pada masing-masing segmen. Bersesuaian dengan hal tersebut, pemilihan model peluang terbaik untuk kasus pertama, berasosiasi dengan penentuan banyaknya keadaan “N” pada model N-keadaan Poisson-MMT. Untuk mengerjakannya, cara yang umum digunakan adalah menggunakan pendekatan *trial and error* dari berbagai kemungkinan banyaknya keadaan (Zucchini dkk., 2016). Berdasarkan hasil kriteria pemilihan model (*Bayesian Information Criteria*), model peluang yang sesuai dengan sebaran peluangnya adalah model 3-keadaan Poisson-MMT, parameter-parameter yang dihasilkan dari model tersebut dapat dilihat Tabel 4.10.

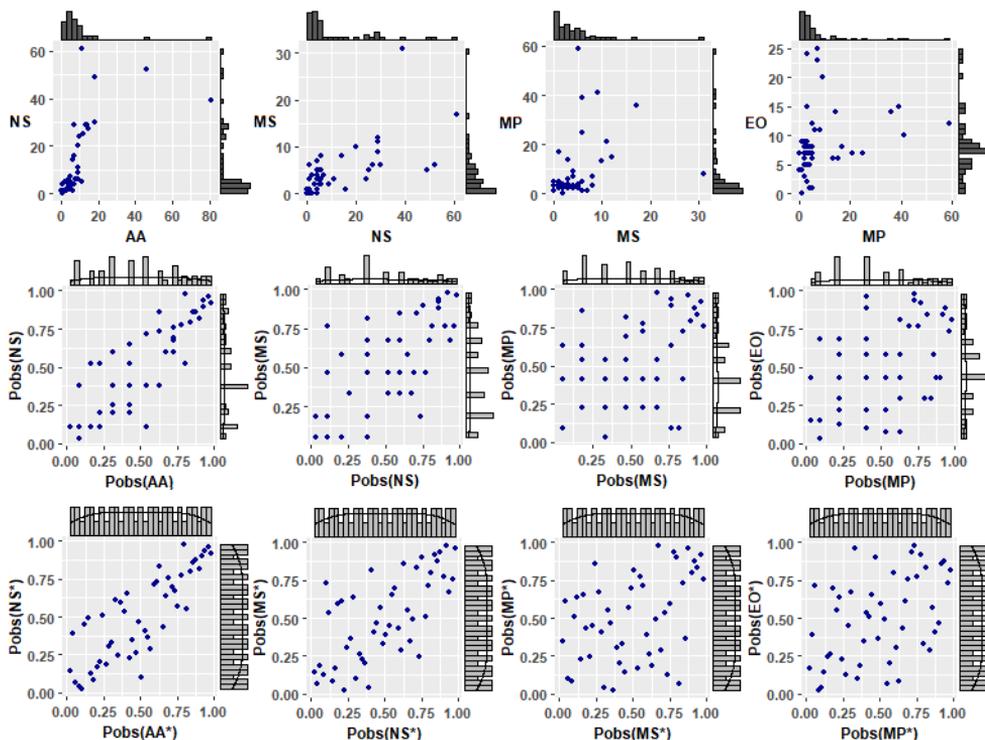
**Tabel 4.10** Rekapitulasi parameter model peluang 3-keadaan Poisson-MMT untuk kelima segmen [Sumber: artikel penulis].

Segmen	Keadaan	Parameter					Observasi		Model	
		$\delta$	$\lambda$			A	Mean	Variance	Mean	Variance
			EM	90% Conf. Limits						
AA	1	0.620	4.383	3.638	5.164	$\begin{bmatrix} 0.982 & 0 & 0.018 \\ 0.032 & 0.968 & 0 \\ 0 & 0.506 & 0.494 \end{bmatrix}$	8.729	165.095	8.415	91.409
	2	0.358	11.918	9.182	14.227					
	3	0.022	63.500	54.104	71.661					
NS	1	0.606	3.567	2.959	4.485	$\begin{bmatrix} 0.981 & 0.019 & 0 \\ 0.038 & 0.875 & 0.087 \\ 0 & 0.270 & 0.730 \end{bmatrix}$	11.938	221.336	13.867	231.098
	2	0.298	23.085	21.215	24.850					
	3	0.096	50.339	43.965	55.648					
MS	1	0.776	2.534	2.084	2.998	$\begin{bmatrix} 0.957 & 0.043 & 0 \\ 0.175 & 0.655 & 0.170 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	4.583	27.525	4.261	22.125
	2	0.192	7.842	6.459	9.063					
	3	0.032	24.317	19.913	29.200					
MP	1	0.579	2.621	1.542	4.022	$\begin{bmatrix} 0.980 & 0.020 & 0 \\ 0.040 & 0.881 & 0.079 \\ 0 & 0.185 & 0.815 \end{bmatrix}$	8.479	150.255	8.810	129.760
	2	0.295	9.015	7.422	10.551					
	3	0.126	36.839	33.703	39.396					
EO	1	0.214	0.498	0.000	1.269	$\begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0 \\ 0 & 0.936 & 0.064 \\ 0.063 & 0.094 & 0.843 \end{bmatrix}$	8.583	32.035	8.060	39.939
	2	0.558	7.199	5.947	8.470					
	3	0.228	17.235	15.322	20.098					

Dari uraian masing-masing parameter yang ditampilkan pada Tabel 4.10, terdapat tiga catatan yang dapat menjadi bahan diskusi berkaitan dengan kekhasan aktivitas seismik pada masing-masing segmen yang dikaji. Catatan yang pertama berkaitan dengan banyaknya fungsi peluang yang membangun data  $X(t)$  dari masing-masing segmen, yakni sebanyak tiga distribusi Poisson dengan masing-masing parameter ditulis dalam vektor ( $\lambda$ ). Catatan yang

kedua berkaitan dengan interpretasi terhadap matriks peluang transisi **A**, khususnya transisi dinamika lempeng tektonik sebanyak dua keadaan. Catatan yang ketiga adalah barisan keadaan dinamika lempeng tektonik yang diestimasi berdasarkan data sejarah frekuensi gempa bumi utama dari tahun 1971 sampai 2018 beserta distribusi keadaan kestasioneran ( $\delta$ ) pada masing-masing segmen.

Penyelesaian untuk kasus kedua adalah sebagai berikut. Gambar 4.48 menampilkan sebaran pasangan dari dua segmen berdekatan, yakni AA-NS, NS-MS, MS-MP, dan MP-EO yang dideskripsikan dalam empat kolom terpisah. Baris pertama pada gambar tersebut merupakan sebaran pasangan data penelitian sedangkan baris kedua merupakan sebaran pasangan data dari fungsi distribusi empirik data penelitian. Baris terakhir pada gambar tersebut merupakan sebaran pasangan data dari fungsi distribusi empirik proses kontinuasi dari data penelitian.



**Gambar 4.48** Sebaran pasangan data dari dua segmen berdekatan. Kolom merepresentasikan empat kasus dari dua segmen yang berdekatan. Sedangkan baris pada gambar secara berurutan merepresentasikan pasangan data dari: data penelitian, fungsi distribusi empirik data penelitian, dan fungsi distribusi empirik hasil kontinuasi data penelitian [Sumber: artikel penulis].

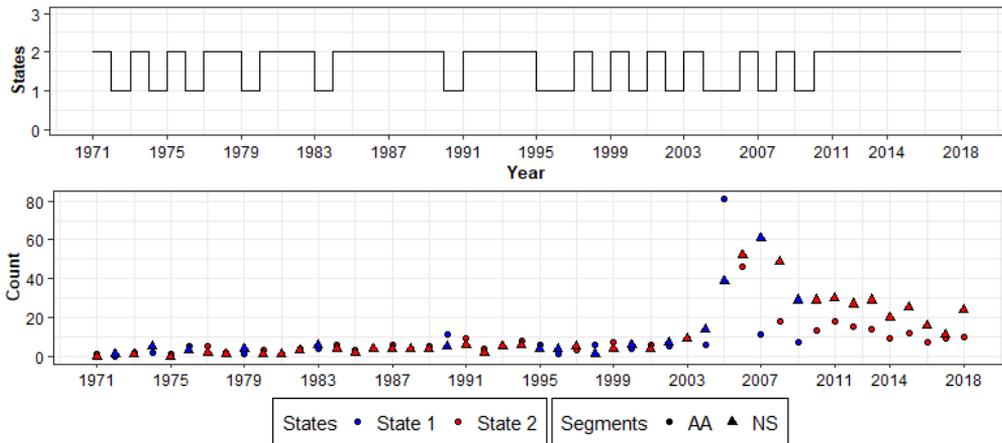
Berdasarkan Gambar 4.48, terdapat beberapa hal yang dapat dijelaskan berkaitan dengan perilaku dari sebaran pasangan data penelitian. Dari baris pertama, sebaran data memiliki kecenderungan berada pada jumlah frekuensi gempa bumi yang relatif rendah dari masing-masing segmen. Selanjutnya, dari baris kedua dan ketiga, terdapat perbedaan antara fungsi distribusi empirik dari data penelitian dengan data penelitian yang dikontinuasi. Perbedaan yang dimaksud adalah nilai-nilai fungsi distribusi empirik yang sama (baik vertikal maupun horizontal) pada gambar baris kedua tidak terjadi pada gambar baris ketiga. Kondisi ini diperlukan dalam konstruksi model dengan pendekatan model Copula (Nelsen, 2006), (Trivedi dan Zimmer, 2007).

**Tabel 4.11** Nilai estimasi parameter dari model terpilih untuk keempat kasus [Sumber: artikel penulis].

Model Terpilih beserta Estimasi Parameter		Dua Segmen Berdekatan				
		AA-NS		NS-MP	MS-MP	MP-EO
		State 1	State 2			
Model terpilih		2-state Gumbel-HMM		Gaussian Copula	Gumbel Copula	Frank Copula
Nilai cvm		0.069		0.032	0.029	0.014
Parameter $\theta$	EM	2.037	3.629	0.728	1.415	3.047
	90% Conf. Limits	1.931	2.024	0.716	1.335	2.510
		3.533	4.189	0.775	1.600	4.199
Estimasi nilai Kendall's $\tau$	EM	0.509	0.724	0.519	0.293	0.311
	90% Conf. Limits	0.499	0.550	0.507	0.255	0.268
		0.681	0.785	0.564	0.378	0.404
Jumlah anggota		15	33	48	48	48
Parameter dari $\delta_C$		0.415	0.585	1	1	1
Parameter dari $\Gamma_C$		$\begin{bmatrix} 0.036 & 0.964 \\ 0.691 & 0.309 \end{bmatrix}$		1	1	1

Berdasarkan hasil kriteria pemilihan model, model peluang beserta nilai estimasi parameter, yang sesuai dengan sebaran data bivariat dapat dilihat Tabel 4.11. Dari tabel tersebut, dapat dilihat bahwa keadaan dari segmen Aceh Andaman dan Nias Simeuleu terdefinisi dengan baik yang dapat diklasifikasikan dalam dua kelompok keadaan yang masing-masing mengikuti distribusi Copula Gumbel dengan parameter masing-masingnya adalah  $\theta_1 = 2.037$  dan  $\theta_2 = 3.629$ . Selanjutnya, banyaknya anggota dari masing-masing kelompok adalah 15 pasangan data (dengan nilai Kendall's  $\tau = 0.509$ ) and 33 pasangan data (dengan nilai Kendall's  $\tau = 0.724$ ).

Selanjutnya, estimasi dari matriks peluang transisi untuk model Gumbel-HMM dengan dua keadaan ditampilkan pada baris terakhir dari Tabel 4.11. Dari baris pertama matriks peluang transisi tersebut, ketika pasangan data Aceh Andaman dan Nias Simeuleu berada pada keadaan 1, pasangan data tersebut tetap berada pada keadaan tersebut dengan probabilitas hanya 0,036 atau pilihan lain, yakni pindah ke keadaan 2 dengan probabilitas 0,964. Demikian pula, dari baris kedua, ketika pasangan data Aceh Andaman dan Nias Simeuleu berada di keadaan 2, pasangan data tersebut tetap berada di keadaan tersebut dengan probabilitas 0,309 atau akan pindah ke keadaan 1 dengan probabilitas sama dengan 0,691. Oleh karena itu, dari sudut pandang deret waktu, perilaku aktivitas seismik untuk berpindah dari satu keadaan ke keadaan lain memiliki probabilitas lebih besar dibandingkan tetap berada dalam keadaan yang sama, seperti yang ditunjukkan secara grafis pada Gambar 4.49 (bagian atas). Sedangkan dari distribusi stasioner, yakni 0,415 dan 0,585, probabilitas aktivitas seismik pada tahun tertentu di masa depan (yang cukup jauh dari tahun 2018) untuk berada pada keadaan 1 adalah sekitar 42%, sedangkan pada keadaan 2 sebesar 58%.



**Gambar 4.49** Estimasi keadaan aktivitas seismik dari segmen AA-NS (atas) dan klasifikasi gempa bumi didasarkan pada keadaan dan segmennya (bawah) [Sumber: artikel penulis].

**Kesimpulan:** Berikut adalah beberapa kesimpulan dari Kasus Pertama, yakni masing-masing dari lima segmen dianalisis secara independen. Aktivitas seismik setiap segmen mempunyai ketergantungan waktu serial, dibuktikan dengan model yang sesuai untuk kelima segmen adalah 3-keadaan Poisson HMM. Tiga keadaan dalam model ini mewakili tingkat kegempaan

frekuensi gempa *mainshock*: jarang, sedang, dan sering, yang sesuai dengan tingkat pergerakan tektonik: dinamika rendah, sedang, dan tinggi. Lebih lanjut, berdasarkan matriks probabilitas transisi, aktivitas seismik segmen Aceh Andaman dan Enggano berpeluang melonjak dua tingkat, masing-masing dari rendah ke tinggi dan dari tinggi ke rendah. Oleh karena itu, temuan ini dapat mengarahkan para ahli geologi untuk menyelidiki lebih lanjut bagaimana dan mengapa aktivitas seismik yang terpartisi di satu zona megathrust yang sama dapat memiliki karakteristik yang berbeda.

Berikut beberapa kesimpulan dari Kasus Kedua, yaitu studi aktivitas seismik dua segmen yang berdekatan (AA-NS, NS MS, MS-MP, dan MP-EO). Teknik *Continuous Extension* pertama kali diaplikasikan untuk mengubah variabel diskrit menjadi variabel kontinu karena sifat diskrit dari data seismisitas. Dari empat kelompok yang dieksplorasi, ditemukan bahwa untuk kelompok AA-NS, tidak hanya ketergantungan waktu serial, tetapi juga ketergantungan spasial, yang dibuktikan dengan model terpilih yang sesuai dengan data empiris kedua segmen tersebut, yaitu 2-keadaan Gumbel-HMM. Sedangkan untuk tiga kelompok sisanya, Nias-Simeulue dengan Mentawai-Siberut, Mentawai Siberut dengan Mentawai-Pagai, dan Mentawai-Pagai dengan Enggano, masing-masing model yang sesuai adalah Gaussian Copula, Gumbel Copula, dan Frank Copula. Dalam hal ini, jumlah keadaan mewakili hubungan aktivitas seismik antara dua segmen yang berdekatan, yang berkaitan dengan tingkat hubungan antara dua dinamika lempeng tektonik yang berdekatan.

Dari sudut pandang praktis, model yang diusulkan jarang dibahas dalam kajian pemodelan kegempaan. Oleh karena itu, hasil ini akan memberikan kontribusi yang signifikan terhadap analisis aktivitas seismik dalam literatur teknik gempa, khususnya untuk permasalahan seismik di zona subduksi Sumatra.

## 5 PENUTUP

Pada bagian pertama naskah ini telah dipaparkan seputar pemodelan matematika. Salah satu bagian dari prosesnya adalah memformulasikan masalah nyata dalam bentuk model matematika yang dapat diselesaikan. Kata yang terakhir ini secara implisit memuat makna adanya penyederhanaan dari suatu realitas yang kompleks. Proses memformulasikan ini setidaknya perlu abstraksi dan wawasan yang luas terhadap masalah nyata yang dikaji. Oleh karenanya, dibutuhkan penguasaan ilmu-ilmu dasar yang kuat dan kemampuan komunikasi yang baik dengan disiplin ilmu lain.

Ilmu pengetahuan dan teknologi telah berkembang sangat cepat. Perkembangan tersebut tidak hanya mendorong pada penemuan teorema baru di dalam ilmu matematika sendiri, tetapi juga telah mendorong kontribusi ilmu matematika pada masalah nyata. Bidang Matematika Industri adalah ruang bagi kontribusi tersebut. Ruang untuk mempromosikan matematika sebagai bagian dari penyelesaian masalah, dan ruang baginya pula untuk berkolaborasi dengan disiplin ilmu lain.

Pada naskah ini juga telah dipaparkan beberapa hasil penelitian penulis dkk. yang sebagian besar dari penelitian tersebut menggunakan proses pemodelan matematika. Informasi non-matematis yang ada pada masalah yang dikaji dapat diatasi melalui kolaborasi dengan kolega pada bidang yang bersesuaian. Bekerja sama dalam sebuah tim akan meringankan beban yang dihadapi; setiap individu akan berperan sesuai dengan disiplin ilmunya masing-masing.



## 6 UCAPAN TERIMA KASIH

Buku Orasi Ilmiah Guru Besar ini tidak mungkin dapat disusun tanpa pertolongan dari Allah Swt. serta dukungan dan bantuan dari banyak pihak. Pada kesempatan ini ijin penulis mengungkapkan ucapan terima kasih secara tulus kepada mereka.

1. Kedua orang tua penulis, Ibu Yoyoh dan Bapak Didi (Allahu yarham) yang senantiasa mengiringi kehidupan penulis dengan doa dan nasihatnya, *Rabbighfirlil wa liwalidayya warhamhumaa*. Kedua Mertua, Ibu Itje Kurniati dan Bapak Nana Nawawi Gaos, yang senantiasa mendorong penulis untuk meraih jabatan sekarang, *hatur nuhun*; Kepada keluarga, Bu 'Neng' Anne Kurniasari Nawawi, terima kasih atas dukungan, pengertian, dan doanya; Ananda 'Teh amoy' Najmina Maryam Gunawan dan 'si Bung' Luqman Syafiq Gunawan atas dukungan dan pengertiannya. Semoga semua amal baiknya dibalas oleh Allaah Swt. *Rabbii hablii ahlan sakinatan wa mawaddatan wa rahmatan, wa dzurriyatan thoyyibatan*; Adik penulis, Dina Savitri Nurhidayah, yang telah berbagi rizki saat penulis kuliah di ITB, terima kasih atas pengorbanannya.
2. Prof. Dr. M. Ansjar yang telah memperkenalkan penulis pada Matematika Terapan; Prof. Dr. Edy Soewono yang telah memperkenalkan penulis pada Matematika Industri; Prof. Dr. Wono Setyabudhi yang telah memperkenalkan penulis pada Matematika Analisis; Prof. Dr. Kuntjoro Adji Sidarto yang telah memperkenalkan beragam masalah matematika dalam kehidupan melalui pemodelan matematika; Prof. Dr. Maman A. Djauhari yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk mengambil ikatan dinas menjadi dosen, dan Prof. Dr. Sri Redjeki Pudjaprasetya yang telah membantu memberikan masukan untuk naskah orasi ini.
3. Penghargaan yang setinggi-tingginya kepada yang telah memberikan dukungan dan bantuan dalam proses pengajuan jabatan Guru Besar ini hingga tuntas: anggota KK Matematika Industri dan Keuangan FMIPA ITB, Dekan dan para Wakil Dekan FMIPA ITB beserta timnya, Pimpinan Senat FMIPA ITB beserta anggotanya, Pimpinan Senat Akademik ITB beserta anggotanya, Pimpinan dan anggota Forum Guru Besar ITB, serta Rektor dan Pimpinan Pusat ITB.
4. Penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para pemberi rekomendasi: Prof. Dr. Sri Redjeki Pudjaprasetya, Prof. Dr. Edy Soewono, Prof. Dr. Edy

- Tri Baskoro, Prof. Dr. M. Salman A.N., Prof. Dr. Ir. Yogi Wibisono Budhi, S.T., M.T., I.P.M., Prof. Dr. Syafrizal Sy (Universitas Andalas), Prof. Dr. J. Molenaar (WUR, Belanda), dan Dr. Ir. A.A.F. van de Ven (TUE, Belanda).
5. Apresiasi yang tinggi kepada seluruh guru TK, SD, SMP, SMA, dan dosen purnabakti di komunitas matematika, tempat penulis menimba ilmu.
  6. Apresiasi yang tinggi kepada para dosen lainnya di komunitas matematika: Ahmad Muchlis, Ph.D.; Prof. Irawati; Prof. Pudji Astuti; Prof. Hendra Gunawan; Prof. Iwan Pranoto; Prof. Udjianna S. Pasaribu; Prof. Roberd Saragih; Prof. Janson Naiborhu; Prof. Leo H. Wiryanto; Oki Neswan, Ph.D.; Yudi Soeharyadi, Ph.D.; Dumaria R. Tampubolon, Ph.D.; Dr. Saladin Uttunggadewa; Warsoma Djohan, M.Si.; Prof. Hilda Assiyatun; Prof. Djoko Suprijanto; Prof. Muchtadi Intan Detiena; Prof. Khreshna I.A. Syuhada; Prof. Sapto W. Indratno; Prof. Novriana Sumarti; Prof. Nuning Nuraini; Dr. Janny Lindiarni; Dr. Johan M. Tuwankotta; Dr. Jalina Widjaja; Dr. Rinovia Simanjuntak; Dr. Hanni Garminia; Aleams Barra, Ph.D.; Dr. Eric; Dr. RR. Kurnia Novita Sari; Dr. Utriweni Mukhaiyar; Dr. Dellavitha Nasution; Dr. Finny Oktariani; Dr. Suhadi W. Saputro; Dr. Gantina Rachmaputri; Yuli Sri Afrianti, M.T.; Dr. Aditya Purwa S.; Dr. Fajar Yuliawan; Denny I. Hakim, Ph.D.; Pritta E. Putri, Ph.D.; Dr. Elvira Kusniyanti; Dr. Sandy Vantika; Dr. Erma Suwastika; Afif Humam, M.Si.; Dr. Adilan W.M.; Rizal Afgani, Ph.D.; Ifronika, M.Si.; Arnasli Yahya, M.Si.; Yusuf Hafidh, M.Si.; Defita, M.Si.; Ning J. Farida, M.Si.
  7. Apresiasi yang tinggi kepada dosen muda anggota KK MIK: Dr. Dewi Handayani; Dr. Mochamad Apri; Dr. Novry Erwina; Dila Puspita, Ph.D.; Dr. Adhe Kania; Dr. Ikha Magdalena; Rudy Kusdiantara, Ph.D.; Prama Setia Putra, Ph.D.; M. Islahuddin, M.Sc.; M. Ridwan Reza N., M.Si., Ade Bayu Chandra, M.Si..
  8. Penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para kolaborator: Prof. Septorato Siregar, Prof. Pudjo Sukarno, Prof. Tutuka Ariadji, Prof. Asep K. Permadi, Dr. Leksono Mucharam, Prof. Sudjati Rachmat, Prof. M.T.A.P. Kresnowati, Prof. Irwan Meilano, Dr. Prijana Sudjono, Dr. Masayu L. Khodra, Iding A. Haidir, DPhil (CEO Kaltim Lestari Utama/ Forum), Dr. Arnida L. Latifah (BRIN), Dr. Narendra K. Putra, Dr. Silvy D. Rahmawati;
  9. Penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para tamu undangan: Prof. Suprijanto, Prof. Yayan Sumekar (Unpad), Prof. Sutawanir Darwis, Dr. Ir. Isnuwardianto, DEA (Rektor ISTN), Dr. Oki Muraza (Senior Vice President

Technology Innovation Pertamina (Persero)), dan lainnya yang tidak bisa dituliskan satu per satu.

10. Penghargaan yang setinggi-tingginya kepada perwakilan MA 90 ITB.
11. Apresiasi yang tinggi kepada para mahasiswa program doktor yang telah lulus dan masih aktif: Dr. Mashuri, Dr. Windarto, Dr. Nina Fitriyati, Dr. Pardomuan Sitompul, Dr. Asti Meiza, Dr. Aang Nuryaman, Prof. Kasbawati, Dr. Kartika Yulianti, Dr. Meta Kallista, Dr. M. Ahsar, Dr. Jose Rizal, Dr. Rustam, Dr. Anita Triska, Dr. Fajril Ambia (FTTM), Dr. Erdila Indriani (FTTM), Dr. Diyah Rosiani (FTTM), Dr. N.T.N. Anh (FTSL), Yasi Dani, M.Si., Ahmad Shulhany, M.Si, M. Riyadi, M.Si., Rina Reorita, M.Si., Intan Nuni Wahyuni, M.Si., Dwi Purliantoro, S.Si., M.Pd.
12. Apresiasi yang tinggi atas dukungannya kepada semua pihak yang namanya tidak bisa dituliskan satu persatu pada naskah ini. Mohon maaf apabila ada kesalahan penulisan nama atau gelar pada naskah ini.



# DAFTAR PUSTAKA

- Afkhami, S., Kondic, L., 2014, On the dewetting of Liquefied Metal Nanostructures. *J. Eng. Math.* DOI: 10.1007/s10665-013-9685.
- Bender, E.A., 1978, An introduction to mathematical modeling, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Berres, S., Marin, J. G., 2013, On epidemics models with nonlinear cross diffusion, *20th International Congress on Modelling and Simulation*.
- Berry, J., Houston, K., 1995, Mathematical Modelling, Elsevier, Oxford.
- Bohun, C.S., 2014, An introduction to modern industrial mathematics, *Notices of the AMS* 61(4), 364-375.
- Bonn, D., Eggers, J., Indekeu, J., Meunier, J., Rolley, E., 2009), Wetting and spreading, *Reviews of Modern Physics* 81(2), 739-805.
- Cai, Y., Chi, D., Liu, W., Wang, W., 2013, Stationary patterns of a cross-diffusion epidemic model, *Applied Analysis*, Vol. 2013, Hindawi.
- Can, C., Ergun, G., Gokceoglu, C., 2014, Prediction of earthquake hazard by hidden Markov model (around Bilecik, NW Turkey), *Open Geosciences* 6(3): 403-414. <https://doi.org/10.2478/s13533-012-0180-1>.
- Chambers, D.W., Baglivo, J.A., Ebel, J.E., Kafka, A.L., 2012, Earthquake forecasting using Hidden Markov models. *Pure and Applied Geophysics* 169(4):625639, 2012. <https://doi.org/10.1007/s00024-011-0315-1>.
- Chang, F.M., Sheng, Y.J., Chen, H., Tsao, H.K., 2007, From superhydrophobic to superhydrophilic surfaces tuned by surfactant solutions, *Applied Physics Letters* 91.
- de Jesus, W. C., Roma, A. M., Pivello, M. R., M.Villar, M., Silveira-Neto, A., 2015, A 3D front-tracking approach for simulation of a two-phase fluid with insoluble surfactant, *Journal of Computational Physics* 281, 403–420.
- de Gennes, P.G, Brochard-Wyart, F., Quere, D., 2004, Capillarity and wetting phenomena: drops, bubbles, pearls, Waves, Springer.
- Dempster, A.P., Laird, N.M., Rubin, D.B., 1977), Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* 39(1), 1-22.

- Dym, C.L. Principles of mathematical modeling, 2004, Academic Press.
- Dymarski, P., 2011, Hidden Markov Models, theory and applications, In Tech.
- Edwards, D., Hamson, M., 1989, Guide to mathematical modelling, MACMILLAN EDUCATION LTD, London.
- Fan, Y., 2014, Pattern formation of an epidemic model with cross diffusion, *Applied Mathematics and Computation* 228, 311–319.
- Giordano, F.R., Weir, M.D., Fox, W.P., 2003, A first course in mathematical modeling, Brooks/Cole.
- Hall-Wallace, M.K., 1998, Can earthquakes be predicted?, *Journal of Geoscience Education* 46, p. 439-449.
- Hawkins Jr., M.F., 1956. A note on the skin effect. *Trans. AIME* 207, 356–357.
- Jolliffe, I. T, 2002, Principal component analysis for special types of data, Springer.
- Knops, Y.M.M., 1997, Morphology development in polymer blends: the hydrodynamic interaction between disintegrating threads, *Final Reports of the Postgraduate Programme Mathematics for Industry*, SAI, TU Eindhoven, The Netherlands.
- Kralchevsky, P.A., Danov, K.D., Kolev, V.L., Gurkov, T.D., Temelska, M.I., Brenn, G., 2005, Detachment of oil drops from solid surface in surfactant solutions: molecular mechanisms at a moving contact line, *Ind. Eng. Chem. Res* 44: 1309-1321.
- Lai, M.C., Hsu, C.W, Huang, H., 2009, A front-tracking method for motion by mean curvature with surfactant, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics* 1, 288-300.
- Lai, M.C., Tseng, Y.H., Huang H., 2010, Numerical Simulation of Moving Contact Lines with Surfactant by Immersed Boundary Method, *Commun. Comput. Phys* 8 (4), pp. 735-757.
- Lamon, S.J., Parker, W.A., Houston, K., 2003, Mathematical Modelling: A Way Of Life, Horwood Publishing Limited, England.
- Leal, L. G., 2007, Advanced transport phenomena: fluid mechanics and convective transport processes (Vol. 7). Cambridge University Press.
- Lei, F., Rothboll, M., Jorgensen, S.B., 2001, A biochemically structured model for *Saccaromyces cerevisiae*, *Journal of Biotechnology* 88, 205–221.

- Li, L., Sun, G.-Q., Jin, Z., 2009, Traveling pattern induced by migration in an epidemic model, *Journal of Biological Systems* 17(02), 319–328.
- Li, Z., Lai, M.C., He, G., Zhao, H., 2010, An augmented method for free boundary problems with moving contact lines, *Computers and Fluids* 39, 1033-1040.
- Liu, J., Nguyen, N.T., Yap, Y.F., 2011, Numerical studies of sessile droplet shape with moving contact lines, *Micro and Nanosystems* 3.
- Mahalanobis, P. C., 1930, On test and measures of group divergence: theoretical formulae, *Journal and Proceedings of Asiatic Society of Bengal New series* 26, 541–588.
- Mattheij, R., Molenaar, J., 2002, Ordinary differential equations in theory and practice, SIAM edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Murray, J. D. ,2001, Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications, *Interdisciplinary Applied Mathematics V. 18*, Springer-Verlag New York Incorporated New York.
- Nelsen, R.B., 2006, An introduction to copulas. 2nd Edition, Springer, New York.
- Orfanogiannaki, K., Karlis, D., Papadopoulos, G.A., 2010, Identifying seismicity levels via Poisson Hidden Markov models, *Pure Applied Geophysics* 167, 8–9: 919–931. <https://doi.org/10.1007/s00024-010-0088-y>.
- Orfanogiannaki, K., Karlis, D., Papadopoulos, G.A., 2014, Identification of temporal patterns in the seismicity of Sumatra using Poisson Hidden Markov Models, *Research in Geophysics* 4(1). <https://doi.org/10.4081/rg.2014.4969>.
- Parn-anurak, S., Engler, T.W., 2005. Modeling of fluid filtration and near-wellbore damage along a horizontal well, *Journal of Petroleum Science and Engineering* 46, 149–160.
- Pearson, J.R.A., 2009, On a Simple model for surfactant-dominated contact-line movement, *Chemical Engineering Science* 64, 4737-4743.
- Powel, J. A., Duda, S. J., 1975, A statistical study of earthquake occurrence, *Pure and Applied Geophysics* 113, 447–460.
- Reid, H.F., 1910, The mechanics of the California earthquake of April 18, 1906: Report of the State Earthquake Investigative Committee, Washington DC, Carnegie Institute.

- Renardy, M., Renardy, Y., Li, J., 2001, Numerical simulation of moving contact line problems using a volume-of-fluid method, *Journal of Computational Physics* 171, 243–263.
- Rosen, M.J., 2004, Surfactant and interfacial phenomena, John Willey & Sons.
- Salehi, M., Johnson, S. J., Liang, J. T., 2008, Mechanistic study of wettability alteration using surfactants with applications in naturally fractured reservoirs, *Langmuir* 24(24), 14099-14107.
- Scheffers, W.A., van Dijken, J.P., Postma, E., Verduyn, C., 1989, Enzymic analysis of the crabtree effect in glucose-limited chemostat cultures of *Saccharomyces cerevisiae*, *Applied and Environmental Microbiology* 55 (2) (1989), 468–477.
- Shikmurzaev, 2008, Capillary flows with forming interfaces, Chapman and Hall, London.
- Sprittles, J.E., 2010, Dynamic wetting /dewetting processes in complex liquid-solid systems, *Thesis* at The University of Birmingham.
- Stockie, J., 2015, Mathematics for industry: a personal perspective, arXiv: 1509.03272v1 [math: HO].
- Sun, G.-Q., Jin, Z., Liu, Q.-X. dan Li, L. ,2009, Spatial pattern in an epidemic system with cross-diffusion of the susceptible, *Journal of Biological Systems*, 17(01), 141–152.
- Svadlenka, K., Omata, S., 2008, Modelling and analysis of droplet motion on a plane, *Proceeding of the Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics*, 60-71.
- Trivedi, P., Zimmer, D., 2007, Copula modeling: an introduction for practitioners, *Foundations and Trends in Econometrics* 1(1), 1-111.
- Turing, A. M., 1952, The chemical basis of morphogenesis, *Bulletin of Mathematical Biology*, 52(1-2), 153–197.
- Wei-Ming, W., Hou-Ye, L., Yong-Li, C. dan Zhen-Qing, L., 2011, Turing pattern selection in a reaction-diffusion epidemic model, *Chinese Physics B* 20(7), 074702.
- Wegener, A., 1966, The Origins of continents and oceans, Penguin Press
- Yan, J., Jiang, G., Wu, X., 1997. Evaluation of formation damage caused by drilling and completion fluids in horizontal wells, *J.Can. Petrol. Technol.* 36 (5), 36–42.

- Yip, C.F., Ng, W.L., Yau, C.Y., 2018, A Hidden Markov model for earthquake prediction, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* 32(5): 1415-1434. <https://doi.org/10.1007/s00477-017-1457-1>.
- Zhang, D.L., Liu, S., Puerto, M., Miller, C.A., Hirasaki, G.J., 2006, Wettability alteration and spontaneous imbibition in oil-wet carbonate formations, *Journal of Petroleum Science and Engineering* 52, 213-226.
- Zucchini, W., MacDonald, I.L., Langrock, R., 2017, Hidden markov models for time series: an introduction using R. eBook ISBN 9781315372488, Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/b20790-2>.



# CURRICULUM VITAE



Nama : Prof. Dr. Agus Yodi Gunawan  
Tempat/tgl lahir : Sumedang/2 Agustus 1971  
Kel. Keahlian : Matematika Industri & Keuangan  
Alamat Kantor : FMIPA, Jln. Ganesa 10 Bandung  
Nama Istri : apt. Anne Kurniasari Nawawi, S.Si.  
Nama Anak : Najmina Maryam Gunawan, S. Farm.  
Luqman Syafiq Gunawan

## I. RIWAYAT PENDIDIKAN

- Doktor (Dr.), Faculteit Wiskunde en Informatica, Technische Universiteit Eindhoven (Tu/e), The Netherlands, 2000-2004.
- Magister Sains (M.Si.), Program Studi Magister Matematika, Institut Teknologi Bandung, 1995-1997.
- Sarjana Sains (S.Si.), Program Studi Sarjana Matematika, Institut Teknologi Bandung, 1990-1994.
- SMA Negeri 1 Sumedang, 1987-1990.
- SMP Negeri 1 Sumedang, 1984-1987.
- SD Negeri Tegalkalong 1 Sumedang, 1978-1984.
- TK Murai Sejahtera Sumedang, 1977-1978.

## II. RIWAYAT KERJA DI ITB

- Staf Pengajar Matematika FMIPA ITB, sejak 1995.
- Wakil Ketua P2MS (Pusat Pemodelan Matematika dan Simulasi), 2007-2010.
- Ketua P2MS (Pusat Pemodelan Matematika dan Simulasi), 2010-2011.
- Ketua Program Studi Sarjana Matematika, 2011-2015.
- Anggota Tim Akreditasi ASIIN Prodi Sarjana Matematika, 2014-2015 dan 2019-2020.
- Anggota Tim Gugus Kendali Mutu Prodi Matematika, 2023.
- Ketua Tim Akreditasi LAMSAMA Prodi Doktor Matematika, 2023.
- Ketua Tim Kurikulum 2024 Prodi Doktor Matematika, 2024.
- Anggota Senat FMIPA ITB, 2023-2027.

### III. RIWAYAT KEPANGKATAN

- Penata Muda, III a; 1 Maret 1995.
- Penata Muda Tk. I, III b; 1 April 1999.
- Penata, III c; 1 Oktober 2002.
- Penata Tk. I, III d; 1 Oktober 2007.
- Pembina, IV a; 1 Oktober 2009.
- Pembina Tk. I, IV b; 1 Oktober 2013.
- Pembina Utama Muda, IV c; 1 April 2024.

### IV. RIWAYAT JABATAN FUNGSIONAL

- Asisten Ahli Madya 1 Desember 1996.
- Asisten Ahli 1 Desember 1998.
- Lektor 1 Oktober 2002.
- Lektor Kepala 1 Juni 2007.
- Profesor/Guru Besar 1 Agustus 2023.

### V. KEGIATAN PENELITIAN

- Penelitian Program Doktor Kemdikbudristek 2024: Pemodelan peluang penyebaran penyakit menular Model SIS pada suatu struktur jaringan kota.
- Penelitian Program Doktor Kemdikbudristek 2024: Pemodelan matematika aliran fluida panas pada domain terbatas yang berisi media berpori.
- Riset Penguatan Inovasi LPIK 2024 (Anggota): Pengembangan simulator *multi-point leak detection system* berbasis *machine learning*.
- PPMI KK 2023 (ITB): Analisis jaringan spesies-habitat untuk menghitung persebaran hewan secara waktu dan tempat.
- PPMI KK 2022 (ITB): Deteksi Pencilan Menggunakan Jarak Mahalanobis pada Sekumpulan Data yang Mengalir secara Dinamis dengan Algoritma PCA Rekursif.
- Riset ITB 2021: Model Prediksi Frekuensi Kejadian Gempa Bumi Menggunakan Pendekatan Copula-Model Markov Tersembunyi: Upaya Penyempurnaan Pemetaan Sumber Dan Bahaya Gempa Di Indonesia.

- Penelitian Desentralisasi 2017-2018: Pemodelan Fenomena Gas Venting pada Pipa Transmisi dan Proses Penyebarannya di Lingkungan Topografi Beragam.
- P3MI ITB 2017: Kajian Bifurkasi, Perturbasi, Dan Estimasi Parameter Yang Memuat Ketidakpastian Pada Suatu Sistem Biokimia.
- Riset Inovasi KK Kategori B 2015: Pemodelan Matematika Dan Simulasi Numerik Reaksi Enzimatik Pada Proses Metabolisme Multisel Dengan Efek Inhibisi Substrat Dan Produk.
- Asahi Glass Foundation 2014: A Wetting Angle Model For An Oil Drop On A Solid Surface Immersed In Surfactant Solution.
- Riset dan Inovasi KK ITB 2014: Pemodelan Matematika Optimasi Produksi Metabolisme Melalui Regulasi Aktivitas Enzim Pada Jalur Metabolisme Bercabang.
- Asahi Glass Foundation 2013: Effect Of A Surfactant On The Dynamics Of Oil Droplet Near A Solid Substrate.
- Riset dan Inovasi KK ITB 2012: Pengembangan Metode Bayesian Pada Simulasi Reservoir.

## VI. PUBLIKASI

### Jurnal Internasional:

- J. Rizal, **A.Y. Gunawan**, S. Yosmar, A. Nuryaman, Seismicity Pattern Recognition in the Sumatra Megathrust Zone Through Mathematical Modeling of the Maximum Earthquake Magnitude Using Gaussian Mixture Models, *Mathematical Modelling and Engineering Problems*; 11/5/2024; 1179-1188.
- Y. Dani, **A.Y. Gunawan**, M.L. Khodra, S.W. Indratno, Detecting Outliers Using Modified Recursive PCA Algorithm For Dynamic Streaming Data, *Mendel*; 29/2/2023; 237-244.
- **A.Y. Gunawan**, A.A.F van de Ven; Non-steady pressure-driven flow of a Bingham fluid through a channel filled with a Darcy-Brinkman medium, *Journal of Engineering Mathematics*; 137/5/2022;1-28.
- A. Triska, **A. Y. Gunawan**, N. Nuraini; *Outbreak spatial pattern formation based on an SI model with the infected cross-diffusion term*, *Journal of Mathematics and Computer Sciences*; 27/1/2022; 1-17.

- Rustam, **A.Y. Gunawan**, M.T.A.P. Kresnowati; Data dimensionality reduction technique for clustering problem of metabolomics data, *Heliyon*; 8/6/2022; e09715.
- D. Rosiani, A.K. Permadi, H.P.S. Siregar, **A.Y. Gunawan**, T. Ariadji; *A New CO<sub>2</sub>-EOR Methods Screening Model Based on Interdependency Parameters*, *Applied Sciences*; 12/8/2022; 1-17.
- J. Rizal, **A.Y. Gunawan**, S.W. Indratno, I. Meilano; *The Application of Copula Continuous Extension Technique for Bivariate Discrete Data: A Case Study on Dependence Modeling of Seismicity Data*, *Mathematical Modelling of Engineering Problems*; 8/5/2021; 793-804.
- J. Rizal, **A.Y. Gunawan**, S.W. Indratno, I. Meilano; *Modeling of Earthquake Hazard for Three Seismogenic Areas on Sumatra Island: A Comparison of Some Discrete Counts Time-series Modelling*, *Disaster Advances*; 13/8/2020; 44-54.
- Rustam, **A.Y. Gunawan**, M.T.A.P. Kresnowati; *Artificial Neural Network Approach For The Identification Of Clove Buds Origin Based On Metabolites Composition*, *Acta Polytechnica*; 60/5/2020; 440-447.
- K. Yulianti, **A.Y. Gunawan**, E. Soewono, L. Mucharam; *The Effects of Surfactant on the Evolution of a Thin Film under a Moving Liquid Drop*, *Indonesian Journal of Science and Technology*; 5/1/2020; 75-85.
- M.A. Karim, **A.Y. Gunawan**; *Parameter Estimations of Fuzzy Forced Duffing Equation: Numerical Performances by the Extended Runge-Kutta Method*, *Abstract and Applied Analysis*; 2020/x/2020; 6179591.
- N.T.N. Anh, C.X. Canh, **A.Y. Gunawan**, P. Sudjono ; *The Application Of Cellular Automata To Investigate Runoff On Surface Of Complex Topography Under Different Rainfall Scenario*, *International Journal of GEOMATE*; 17/59/2019; 222-229.
- S. W. McCue, G. C. Hocking, M. C. Dallaston, L. A. Fullard, P. R. Johnston, **A.Y. Gunawan**, A. D. Fitt; *Flow of non-Newtonian fluids in open channels*, *ANZIAM Journal*; 56/MISG2014/2018; M117-M147.
- N.T.N. Anh, P. Sudjono, G.T. Kusuma, **A.Y. Gunawan**, B.S. Muntalif; *Conservative Solute Transport from Soil to Runoff Flow in a Steep Slope Area*, *International Journal of Technology*; 9/7/2018; 1429-1438.
- Kasbawati, **A.Y. Gunawan**, K.A. Sidarto; *Washout and non-washout solutions of a system describing microbial fermentation process under the*

*influence of growth inhibitions and maximal concentration of yeast cells, Mathematical Biosciences; 289/-/2017; 40-50.*

- F. Ambia, T. Ariadji, Z. Syihab, **A.Y. Gunawan**; *Improvement of Localization Effect on Region Based Covariance Localization Ensemble Kalman Filter Method using Dynamic Parameters*, Journal of engineering and Applied Sciences; 12/23/2017; 7330-7334.
- A. Meiza, S. Darwis, **A.Y. Gunawan**, E. Fitriana; *Quantitative Analysis of the Relationship between Three Psychological Parameters Based on Swallowtail Catastrophe Model*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences; 2017/x/2017; 7418132.
- F. Ambia, T. Ariadji, Z. Syihab, **A.Y. Gunawan**; *Implementation of Region-Based Covariance Localization Ensemble Kalman Filter in History Matching Workflow*, Open Petroleum Engineering Journal; 10/x/2017; 177-194.
- **A.Y. Gunawan**, Kasbawati, K.A. Sidarto; *Approximate Solutions of Linearized Delay Differential Equations Arising from a Microbial Fermentation Process Using the Matrix Lambert Function*, Journal of Mathematical and Fundamental Sciences; 48/1/2016; 25-38.
- Kasbawati, **A.Y. Gunawan**, R. Hertadi, K.A. Sidarto; *Effects of time delay on the dynamics of a kinetic model of a microbial fermentation process*, Anziam Journal; 55/4/2014; 336-356.

Jurnal lainnya:

- A. Triska, **A. Y. Gunawan**, N. Nuraini; *The influence of Basic Reproduction Number on Pattern formation in a Spatial Epidemic model with the Susceptible cross-diffusion*, Mathematical Theory and Modeling; 11/4/2021; 8-16.
- S.D. Rahmawati, Tasmi, P. Sukarno, **A.Y. Gunawan**, E. Soewono, S. Siregar, E.L. Tobing; *A Mathematical Model of Intermittent Gas Lift in Elevation-Production Operation with Line-Pack and Line-Drafting Phenomena in a Gas Line*, Journal of Earth Energy Engineering; 9/2/2020; 88-101.
- E. Indriani, S. Rachmat, L. Mucharram, **A. Y. Gunawan**, M. Achmad, A. Solida; *The Thermal Encroachment of Microwave Heating with Nano Ferro Fluids Injection on Heavy Oil Deposits*, Modern Applied Science; 12/9/2018; 1-6.

- M.A. Karim, **A.Y. Gunawan**, M. Apri, K.A. Sidarto; *Solving A Parameter Estimation Problem Of Goodwin Model With Fuzzy Initial Values*, Far East Journal of Mathematical Sciences; 107/2/2018; 321-338.
- A. Nuryaman, **A. Y. Gunawan**; *A Singular Perturbation Problem In Steady State Of Methane Combustion Using Reverse Flow Reactor*, Far East Journal of Mathematical Sciences; 102/9/2017; 2069-2079.

Jurnal Nasional:

- F.N. Zai, **A.Y. Gunawan**, *Effects of Inversion Layer on The Atmospheric Pollutant Dispersion from A High Chimney*, Journal of the Indonesian Mathematical Society; 29/3/2023; 299-310.
- M.Harry, **A.Y. Gunawan**, *Exploring Physics-Informed Neural Networks For Solving Boundary Layer Problems*, Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA);6/2/2023; 101-116.

Prosiding Seminar Internasional:

- Rustam, **A.Y. Gunawan**, M.T.A.P Kresnowati; *The hard c-means algorithm for clustering Indonesian plantation commodity based on metabolites composition*, International Seminar on Applied Mathematics and Mathematics Education; Journal of Physics: Conference Series, 1315/-/2019, 012085.
- J Rizal, **A.Y. Gunawan**, S.W. Indratno, I. Meilano; *Identifying Dynamic Changes in Megathrust Segmentation via Poisson Mixture Model*, 5th International Conference on Research, Implementation and Education of Mathematics and Sciences; Journal of Physics: Conference Series, 1097/1/2018, 012083.
- M. A. Karim, **A. Y. Gunawan**, M. Apri, K. A. Sidarto; *Solving a fuzzy initial value problem of a harmonic oscillator model*, Symposium on Biomathematics 2016; AIP Conference Proceedings, 1825/x/2017, 020011.
- K. Yulianti , **A. Y. Gunawan**; *Shape profile of an inhomogeneous sessile drop using the variational method*, 3rd International Seminar on Mathematics, Science, and Computer Science Education 2016; AIP Conference Proceedings , 1848/x/2017, 040013.
- Kasbawati, **A. Y. Gunawan**, K. A. Sidarto, R. Hertadi; *A new strategy of glucose supply in a microbial fermentation model*, 5th International

Conference on Mathematics and Natural Sciences 2014; AIP Conference Proceedings, 1677/1/2015, 030015.

- Kasbawati, **A.Y. Gunawan**, R. Hertadi, K.A. Sidarto; *Metabolic Regulation and Maximal Reaction Optimization in the Central Metabolism of A Yeast Cell*, Symposium on Biomathematics (SYMOMATH 2014); AIP Conference Proceedings, 1651/1/2015, 75-85.
- K. Yulianti, **A.Y. Gunawan**, E. Soewono, L. Mucharam; *A new approach for modeling of the surfactant effect on a sessile oil drop motion*, 5th International Conference on Mathematics and Natural Sciences 2014; AIP Conference Proceedings, 1677/1/2015, 030009.

## VII. PENGHARGAAN

- Satyalancana Karya Satya 10 tahun, Pemerintah Republik Indonesia.
- Satyalancana Karya Satya 20 tahun, Pemerintah Republik Indonesia.
- Pengabdian 25 tahun ITB, 2020.
- Dosen terbaik bidang pendidikan Prodi Sarjana FMIPA (acara Dies Natalis FMIPA ke-74), 2021.

## VIII. SERTIFIKASI

- Sertifikasi Dosen 2009, Kementerian Pendidikan Nasional.

## IX. HAK CIPTA

- Program komputer, *Mata Api: Model Automata Seluler Untuk Simulasi Penyebaran Api*, R.D. Ismanto, I.N. Wahyuni, A.L. Latifah, **A.Y. Gunawan**, EC00202391400/10 Oktober 2023.
- Peta, *Peta Tingkat Bahaya Segmen-segmen Sumber Gempa Besar Di Zona Megathrust Sumatra, Terhadap Kejadian Gempa Bumi Utama Bermagnitudo Mw Lebih Besar Atau Sama Dengan 4.6 Dengan Kedalaman Kurang Atau Sama Dengan 70 Km*, J. Rizal, **A.Y. Gunawan**, S.W. Indratno, I. Meilano, EC00202260654/2 September 2022.



📍 Gedung STP ITB, Lantai 1,  
Jl. Ganesa No. 15F Bandung 40132  
☎️ +62 22 20469057  
🌐 [www.itbpress.id](http://www.itbpress.id)  
✉️ [office@itbpress.id](mailto:office@itbpress.id)  
Anggota Ikapi No. 043/JBA/92  
APPTI No. 005.062.1.10.2018

## Forum Guru Besar Institut Teknologi Bandung

Jalan Dipati Ukur No. 4, Bandung 40132  
E-mail: [sekretariat-fgb@itb.ac.id](mailto:sekretariat-fgb@itb.ac.id)  
Telp. (022) 2512532

🌐 [fgb.itb.ac.id](http://fgb.itb.ac.id)    [FgbItb](#)    [FGB\\_ITB](#)  
📱 [@fgbitb\\_1920](#)    [Forum Guru Besar ITB](#)

ISBN 978-623-297-529-3

