



FORUM GURU BESAR
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG



Orasi Ilmiah Guru Besar Institut Teknologi Bandung



DARI RISIKO ACAK HINGGA UKURAN RISIKO Prediksi Stokastik untuk Risiko Keuangan dan Asuransi

Profesor Khreshna Imaduddin Ahmad Syuhada
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Bandung

**Aula Barat ITB
22 Juni 2024**

Orasi Ilmiah Guru Besar
Institut Teknologi Bandung

**DARI RISIKO ACAK
HINGGA UKURAN RISIKO:
PREDIKSI STOKASTIK UNTUK
RISIKO KEUANGAN DAN ASURANSI**

Orasi Ilmiah Guru Besar
Institut Teknologi Bandung

**DARI RISIKO ACAK
HINGGA UKURAN RISIKO:
PREDIKSI STOKASTIK UNTUK
RISIKO KEUANGAN DAN ASURANSI**

Prof. Khreshna Imaduddin Ahmad Syuhada



FORUM GURU BESAR
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

ITB  **PRESS**

Hak cipta © pada penulis dan dilindungi Undang-Undang

Hak penerbitan pada ITB Press

Dilarang memperbanyak sebagian atau seluruh bagian dari buku ini tanpa izin tertulis dan resmi dari penerbit

Orasi Ilmiah Guru Besar Institut Teknologi Bandung:

Dari Risiko Acak Hingga Ukuran Risiko:

Prediksi Stokastik untuk Risiko Keuangan dan Asuransi

Penulis : Prof. Khreshna Imaduddin Ahmad Syuhada

Reviewer : Prof. Muchtadi Intan Detiena

Editor Bahasa : Rina Lestari, Arief Rahman Hakim

Cetakan I : 2024

ISBN : 978-623-297-475-3

e-ISBN : 978-623-297-476-0 (PDF)

ITB PRESS

© Gedung STP ITB, Lantai 1,
Jl. Ganesa No. 15F Bandung 40132
☎ +62 22 20469057
🌐 www.itbpress.id
✉ office@itbpress.id
Anggota Ikapi No. 043/JBA/92
APPTI No. 005.062.1.10.2018

PRAKATA

Bismillahirrahmanirrahim.

Alhamdulillah Rabbi 'Alamin, penulis bersyukur kepada Allah Subhanahu Wa Ta'ala. Atas hidayah-Nya yang besar, buku Orasi Ilmiah Guru Besar Institut Teknologi Bandung dengan judul *Dari Risiko Acak Hingga Ukuran Risiko: Prediksi Stokastik untuk Risiko Keuangan dan Asuransi* dapat diselesaikan dengan baik.

Buku ini merupakan rangkaian hasil pemikiran dan penelitian yang penulis lakukan sejak mengabdikan diri menjadi dosen di Fakultas MIPA ITB dan menempuh studi magister, doktor, dan pascadoktor. **Teori risiko statistik** merupakan bidang ilmu yang menggunakan konsep teori peluang dan statistika untuk diaplikasikan pada bidang lain, seperti keuangan dan asuransi. Secara khusus, teori risiko dapat digunakan untuk memprediksi **risiko stokastik** melalui ukuran risiko *Value-at-Risk (VaR)*, *Expected Shortfall (ES)*, dan perluasannya. Prediksi stokastik ini dapat dikenakan pada risiko pasar mata uang kripto (*cryptocurrency market risk*), risiko pasar energi (*energy market risk*), risiko pembayaran klaim asuransi (*claim frequency and severity risks*), risiko pada kontrak asuransi-reasuransi (*insurance-reinsurance risks*), dan risiko usia lanjut atau mortalitas (*longevity or mortality risk*).

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Forum Guru Besar ITB yang telah memberikan ruang untuk menyampaikan orasi ilmiah dan penerbit ITB Press yang telah memublikasikan buku orasi ini. Semoga orasi ilmiah dan buku ini membawa kebaikan dan keberkahan.

Bandung, 22 Juni 2024

Prof. Khreshna Imaduddin Ahmad Syuhada

SINOPSIS

Buku ini memberikan pemaparan mengenai risiko kuantitatif yang diprediksi secara stokastik melalui ukuran risiko. Risiko adalah kerugian. Risiko adalah akibat negatif dari kegiatan (keuangan dan asuransi). Fenomena risiko dapat dikuantifikasi melalui peubah acak dan bersifat probabilistik; risiko ini kemudian disebut sebagai **risiko acak** atau risiko stokastik. Manajemen risiko secara kuantitatif dilakukan dengan menghitung prediksi risiko melalui **ukuran risiko** Value-at-Risk (VaR) dan Expected Shortfall (ES). Ukuran risiko VaR berbasis peluang, sedangkan ukuran risiko ES berbasis ekspektasi. Pemodelan dan prediksi risiko bermanfaat untuk (i) mengalokasikan cadangan atau modal dan (ii) menghindari risiko yang lebih besar.

Risiko stokastik terjadi di bidang **keuangan dan asuransi**. **Risiko pasar mata uang kripto** dan **risiko pasar energi** adalah contoh risiko stokastik di bidang keuangan. Adapun di bidang asuransi, contoh risiko stokastik adalah **risiko pembayaran klaim** dan **risiko usia lanjut** (*longevity risk*) dan/atau risiko kematian (*mortality risk*).

Tantangan **masa depan risiko stokastik** adalah penggunaan teknologi, termasuk kecerdasan buatan (*artificial intelligence*) untuk memberikan prediksi risiko yang lebih akurat dan pemanfaatan hasil prediksi untuk mendapatkan keamanan finansial (*financial security*) yang lebih efisien.

Manajemen risiko kuantitatif memerlukan statistika.

DAFTAR ISI

PRAKATA.....	v
SINOPSIS	vii
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
1 PENDAHULUAN	1
2 RISIKO ACAK.....	3
3 UKURAN RISIKO	9
Value-at-Risk (VaR).....	10
Improved-VaR.....	12
Expected Shortfall (ES).....	13
VaR dan ES Berbasis Kuantil dan Ekspektil	14
Perluasan ES	17
VaR dengan Momen Orde Tinggi.....	19
Ukuran Risiko Sistemis	20
Ukuran Risiko dengan Kredibilitas	22
Aplikasi Ukuran Risiko.....	23
4 PREDIKSI STOKASTIK UNTUK RISIKO KEUANGAN.....	27
Risiko Pasar Mata Uang Kripto dan Risiko Pasar Energi.....	27
5 PREDIKSI STOKASTIK UNTUK RISIKO ASURANSI.....	37
Risiko Pembayaran Klaim Asuransi	37
Risiko pada Kontrak Asuransi-Reasuransi	41
Risiko Usia Lanjut/Mortalitas.....	47
6 PENUTUP	53
7 UCAPAN TERIMA KASIH	55
DAFTAR PUSTAKA.....	59
CURRICULUM VITAE.....	65

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Grafik fungsi distribusi, fungsi peluang, nilai risiko maksimal, dan batas toleransi.	3
Gambar 2.2	Grafik nilai risiko maksimal dari distribusi statistik diskret dan kontinu.	4
Gambar 2.3	Grafik fungsi peluang dan fungsi distribusi dari distribusi normal standar, t standar, dan SU Johnson standar.	8
Gambar 3.1	Posisi prediksi $VaR_{0,95}$ dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t.	11
Gambar 3.2	Keakuratan prediksi VaR dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t.	11
Gambar 3.3	Keakuratan prediksi estimative-VaR dan improved-VaR dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t.	13
Gambar 3.4	Prediksi nilai risiko maksimal, (estimative- dan improved-) VaR, serta prediksi mean observasi risiko yang lebih besar daripada VaR, (estimative- dan improved-) ES, dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t.	14
Gambar 3.5	Prediksi ukuran risiko berbasis kuantil ($qVaR$, qES) dan ekspektil ($eVaR$, eES) dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t.	17
Gambar 3.6	$DES_{0,95; 1-\alpha^* 0,95; 1-\beta^*}$ dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t berbasis copula FGM serta perbandingannya terhadap $VaR_{0,95}$, $ES_{0,95}$, $MES_{0,95; 1-\alpha^*}$, dan $CES_{0,95 9,95}$	19
Gambar 3.7	Grafik CoVaR (MCoVaR) sebagai fungsi τ Kendall dari risiko acak SU Johnson bivariat (trivariat).	21
Gambar 3.8	Grafik CoVaR (MCoVaR) sebagai fungsi τ Kendall dari risiko acak SU Johnson berbasis copula Gauss dan t bivariat (trivariat).	22
Gambar 4.1	Harga komoditas energi, emas, dan Bitcoin harian beserta imbal hasilnya. Catatan: Harga CO, HO/GAS, emas, dan Bitcoin berturut-turut dinyatakan dalam USD	

	per barel, USD per galon, USD per troy ons, dan USD. Daerah berwarna abu-abu menunjukkan periode selama COVID-19 (31 Desember 2019–31 Maret 2021).	28
Gambar 4.2	Matriks korelasi ρ Pearson dan τ Kendall empiris dari imbal hasil komoditas energi, emas, dan Bitcoin. Catatan: Tanda *, **, *** berturut-turut menunjukkan bahwa koefisien korelasi bernilai tidak sama dengan nol secara signifikan pada tingkat signifikansi 10%, 5%, 1%.....	29
Gambar 4.3	Copula vine yang merepresentasikan kebergantungan antara imbal hasil komoditas energi, emas, dan Bitcoin. Catatan: Pada setiap sisi graf pohon, C, G, dan F berturut-turut menyatakan copula Clayton, Gumbel, dan Frank bivariat terbaik, sedangkan C90/180/270 dan G90/180/270 berturut-turut menyatakan copula Clayton dan Gumbel bivariat yang dirotasi searah jarum jam sebesar 90/180/270 derajat.	30
Gambar 4.4	Prediksi ukuran risiko SDPP _{0,99} dari portofolio komoditas energi dan emas/Bitcoin serta rasio SDPP _{0,99} setelah dan sebelum penambahan emas/Bitcoin. Catatan: Daerah berwarna abu-abu menunjukkan bahwa emas/Bitcoin dapat mengurangi risiko portofolio komoditas energi.	31
Gambar 4.5	Harga minyak mentah, Bitcoin, Tether, dan indeks USD harian beserta imbal hasil (kuadrat)-nya. Catatan: Harga minyak mentah dan Bitcoin/Tether/indeks dolar AS berturut-turut dinyatakan dalam USD per barel dan USD. Daerah berwarna abu-abu menunjukkan periode selama COVID-19 (31 Desember 2019–22 Juli 2022).	32
Gambar 4.6	Matriks korelasi ρ Pearson empiris dari imbal hasil (kuadrat) minyak mentah, Bitcoin, Tether, dan indeks USD. Catatan: Tanda *, **, *** berturut-turut menunjukkan bahwa koefisien korelasi bernilai tidak sama dengan nol secara signifikan pada tingkat signifikansi 10%, 5%, 1%.	32
Gambar 4.7	Copula vine yang merepresentasikan kebergantungan antara imbal hasil minyak mentah, Bitcoin, dan	

	Tether/indeks USD. Catatan: Pada setiap sisi graf pohon, C, G, dan F berturut-turut menyatakan copula Clayton, Gumbel, dan Frank bivariat terbaik, sedangkan C90/180/270 dan G90/180/270 berturut-turut menyatakan copula Clayton dan Gumbel bivariat yang dirotasi searah jarum jam sebesar 90/180/270 derajat.....	33
Gambar 4.8	Prediksi ukuran risiko $VaR_{0,99}$ dan $ES_{0,99}$ dari portofolio minyak mentah (dengan bobot $1 - w_B$) dan Bitcoin (dengan bobot w_B) serta rasio $VaR_{0,99}$ dan $ES_{0,99}$ setelah dan sebelum penambahan Bitcoin. Catatan: Daerah berwarna abu-abu menunjukkan bahwa Bitcoin dapat mengurangi risiko minyak mentah.	34
Gambar 4.9	Prediksi ukuran risiko $VaR_{0,99}$ dan $ES_{0,99}$ dari portofolio minyak mentah (dengan bobot $1 - w_B - w_T$), Bitcoin (dengan bobot w_B), dan Tether (dengan bobot w_T) serta rasio $VaR_{0,99}$ dan $ES_{0,99}$ setelah dan sebelum penambahan Tether, dengan $w_B + w_T \leq 100\%$	34
Gambar 4.10	Prediksi ukuran risiko $VaR_{0,99}$ dan $ES_{0,99}$ dari portofolio minyak mentah (dengan bobot $1 - w_B - w_U$), Bitcoin (dengan bobot w_B), dan indeks USD (dengan bobot w_U) serta rasio $VaR_{0,99}$ dan $ES_{0,99}$ setelah dan sebelum penambahan indeks USD, dengan $w_B + w_U \leq 100\%$	35
Gambar 5.1	Grafik fungsi peluang bersama dan marginal dari banyak klaim (claim frequency, bagian diskret) dan severitas klaim (claim severity, bagian kontinu).	38
Gambar 5.2	Data akumulasi banyak klaim (number of claims).	39
Gambar 5.3	Kecocokan proses Poisson dan Poisson-Lindley (Poisson and Poisson-Lindley processes) untuk data banyak klaim (number of claims).	40
Gambar 5.4	Kecocokan distribusi gama dan Gauss invers (gamma and inverse Gaussian distributions) untuk data severitas klaim (claim severity).	40
Gambar 5.5	Kecocokan distribusi bersama Sarmanov dari proses Poisson-Lindley (Poisson-Lindley process, PLP) untuk data banyak klaim (claim frequency) serta distribusi gama dan Gauss invers (gamma and inverse Gaussian	

	distributions) untuk data severitas klaim (claim severity).....	41
Gambar 5.6	Grafik fungsi kerugian perusahaan asuransi dan reasuransi.	42
Gambar 5.7	Grafik fungsi kesintasan kerugian perusahaan asuransi dan reasuransi.....	43
Gambar 5.8	Grafik ES dari total kerugian perusahaan asuransi dan reasuransi, dengan $\alpha_I = 0,05$, $\alpha_R = 0,01$, dan $b = 0,20$	45
Gambar 5.9	Grafik fungsi kombinasi linier ES dari total kerugian perusahaan asuransi dan reasuransi yang mencapai minimum pada (d_{opt}, c_{opt}) untuk kerugian Eksponensial($\theta = 1$), dengan $\alpha_I(= 0,05) < \alpha_R(= 0,07)$, $\alpha_R(= 0,03) < \alpha_I(= 0,05)$	46
Gambar 5.10	Grafik fungsi kombinasi linier ES dari total kerugian perusahaan asuransi dan reasuransi yang mencapai minimum pada (d_{opt}, c_{opt}) untuk kerugian Pareto(1, $\theta = 2$), dengan $\alpha_I(= 0,05) < \alpha_R(= 0,07)$, $\alpha_R(= 0,03) < \alpha_I(= 0,05)$	47
Gambar 5.11	Log laju mortalitas dari penduduk Amerika Serikat berusia $x = 1, 2, \dots, 90$ pada tahun $t = 1933, 1934, \dots, 2018$	47
Gambar 5.12	Perubahan log laju mortalitas dari penduduk Amerika Serikat berusia $x = 1, 2, \dots, 90$ pada tahun $t = 1934, 1935, \dots, 2018$	48
Gambar 5.13	Prediksi log estimative-MaR dan log improved-MaR ^{0,995} dari penduduk Amerika Serikat berusia $x = 1, 2, \dots, 90$ pada tahun $t = 2019$	50

1 PENDAHULUAN

Risiko atau **kerugian** adalah fenomena yang terjadi di berbagai bidang, seperti keuangan dan asuransi. Risiko dapat dikelola (*managed*) dengan cara dikuantifikasi melalui peubah acak (*random loss*), sehingga risiko dapat diprediksi melalui **ukuran risiko** (*risk measure*). Dalam kuantifikasi dan prediksi risiko tersebut, distribusi statistik (*statistical distribution*) atau model statistik (*statistical model*) yang tepat memiliki peran yang signifikan. Frekuensi atau banyak risiko, misalnya, lebih tepat dimodelkan melalui distribusi statistik diskret. Sementara itu, model statistik kontinu sering kali digunakan pada fenomena nilai atau severitas kerugian.

Manajemen risiko kuantitatif (*quantitative risk management*) dilakukan melalui dua tahapan utama. Tahapan pertama adalah mendefinisikan risiko acak yang sesuai untuk fenomena kerugian. Di bidang keuangan, risiko dapat dipandang sebagai negatif dari imbal hasil (*return*) suatu aset. Untuk klaim asuransi, risiko dihitung dari banyak pembayaran atau nilai pembayaran oleh pihak asuransi kepada nasabah. Tahapan kedua adalah menghitung atau memprediksi risiko acak yang akan datang (*future random risk*) melalui ukuran risiko. Terdapat dua ukuran risiko yang telah dikenal, yaitu **Value-at-Risk** (VaR) dan **Expected Shortfall** (ES). Ukuran risiko VaR memiliki basis peluang, sedangkan ES berbasis ekspektasi. Kedua ukuran risiko ini telah mengalami perluasan atau modifikasi dari berbagai arah (*in several directions*). VaR tidak bersifat koheren sebagai ukuran risiko, tetapi dikenal secara luas dan menjadi pilihan pertama dalam mengatur sistem keuangan. Secara spesifik, Embrechts dkk. (2013) menyebutkan bahwa VaR merupakan suatu sistem/industri dan standar regulasi perbankan dan asuransi.

Prediksi **risiko stokastik** melalui VaR dan ES dapat dikenakan pada berbagai risiko keuangan dan asuransi. Salah satu risiko yang populer adalah risiko pasar mata uang kripto (*cryptocurrency market risk*) dan kaitannya dengan risiko pasar energi (*energy market risk*). Di bidang asuransi, risiko pembayaran klaim (*claim frequency and severity risks*), risiko pada kontrak asuransi-reasuransi (*insurance-reinsurance risk*), dan risiko usia lanjut/mortalitas (*longevity/mortality risk*) merupakan risiko-risiko stokastik yang pemodelan statistiknya, khususnya model yang bersifat heteroskedastis, masih terus dikembangkan.

2 RISIKO ACAK

Fenomena risiko harus dapat dikuantifikasi melalui suatu fungsi bernilai real, X . Fungsi ini memetakan himpunan ruang sampel (fenomena) risiko Ω , ke himpunan bilangan real \mathbb{R} ,

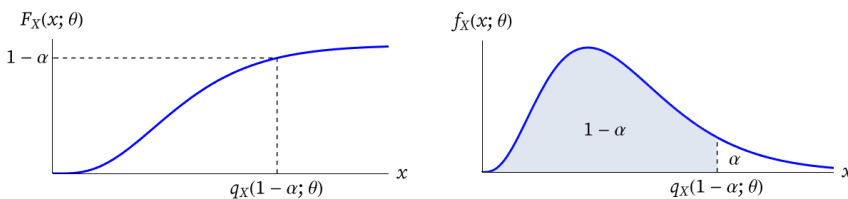
$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

yang selanjutnya disebut sebagai **risiko acak** atau peubah acak. Risiko acak memiliki karakteristik utama, yaitu **berdistribusi secara statistik** (*statistically distributed*). Distribusi statistik dapat diketahui melalui nama distribusi, fungsi peluang (*probability function*) $f_X(x)$, fungsi distribusi (*cumulative distribution function*) $F_X(x)$, fungsi kesintasan (*survival function*) $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$, fungsi pembangkit momen (*moment generating function*) $M_X(t) = E(e^{tX})$, atau fungsi pembangkit peluang (*probability generating function*) $G_X(s) = E(s^X)$. Salah satu komponen penting dari distribusi statistik adalah parameter, misalnya θ , yang menggambarkan profil atau karakteristik risiko dari distribusi tersebut.

Pandang fungsi distribusi $F_X(x; \theta)$ dan fungsi peluang yang bersesuaian, yaitu $f_X(x; \theta)$, untuk suatu parameter θ . Fungsi distribusi memberikan pemahaman mengenai peluang kumulatif/maksimal untuk suatu frekuensi/nilai kerugian x , yaitu

$$F_X(x; \theta) = P_\theta(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(w; \theta) dw = 1 - \alpha, \quad (2.1)$$

untuk suatu $\alpha \in (0, 1)$. Nilai x yang dilekatkan pada fungsi distribusi adalah **risiko maksimal** yang dinyatakan dalam kuantil, $q_X(1 - \alpha; \theta)$. Sementara itu, nilai $1 - \alpha$ adalah batas toleransi yang diberikan. Grafik fungsi distribusi, fungsi peluang, nilai risiko maksimal, dan batas toleransi diberikan pada Gambar 2.1.



Gambar 0.1 Grafik fungsi distribusi, fungsi peluang, nilai risiko maksimal, dan batas toleransi.

Distribusi statistik yang relevan untuk menggambarkan fenomena risiko/kerugian antara lain distribusi Poisson, binomial, dan geometrik (distribusi diskret) serta distribusi eksponensial, Pareto, dan lognormal (distribusi kontinu). **Distribusi diskret** digunakan untuk menyatakan banyak kerugian (*loss frequency*). Fungsi peluang $f_X(x; \theta)$ dari distribusi diskret dapat dinyatakan dalam peluang $P_\theta(X = x)$. Untuk risiko acak X yang berdistribusi Poisson dengan parameter $\theta > 0$, sebagai contoh, fungsi peluang dan fungsi distribusinya, berturut-turut, adalah

$$f_X(x; \theta) = P_\theta(X = x) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

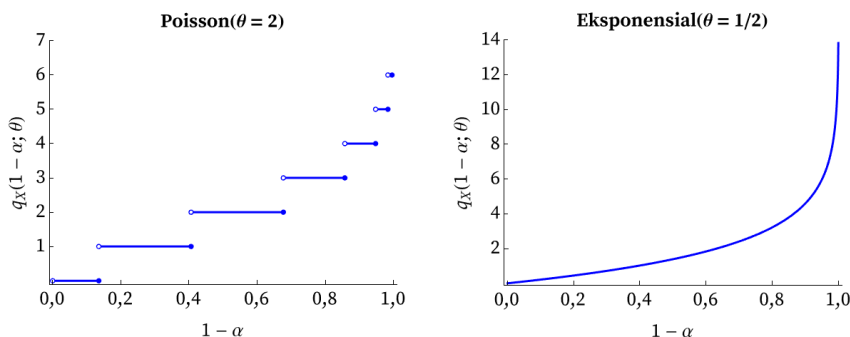
$$F_X(x; \theta) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sum_{w=0}^{\lfloor x \rfloor} e^{-\theta} \frac{\theta^w}{w!}, & x \geq 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

dengan $\theta = E(X) = \text{Var}(X)$ dan $\lfloor \cdot \rfloor$ adalah fungsi lantai (*floor function*). Sementara itu, **distribusi kontinu** tepat untuk memodelkan nilai/besar kerugian (*loss severity*). Distribusi eksponensial dengan parameter $\theta > 0$, misalnya, memiliki fungsi peluang dan fungsi distribusi, berturut-turut,

$$f_X(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad (2.4)$$

$$F_X(x; \theta) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\theta x}, & x \geq 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

dengan $\theta = \frac{1}{E(X)}$. Grafik nilai risiko maksimal untuk beberapa distribusi statistik di atas diberikan pada Gambar 2.2.



Gambar 0.2 Grafik nilai risiko maksimal dari distribusi statistik diskret dan kontinu.

Perhatikan bahwa fungsi distribusi dari beberapa distribusi diskret (termasuk distribusi Poisson) tidak dapat dinyatakan secara eksplisit. Contoh distribusi diskret untuk risiko acak X dengan fungsi distribusi eksplisit adalah distribusi geometrik dengan parameter $\theta \in (0, 1)$,

$$f_X(x; \theta) = (1 - \theta)^x \theta, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

$$F_X(x; \theta) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - (1 - \theta)^{1+|x|}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Risiko acak dapat dimodelkan tidak hanya untuk X tetapi juga untuk koleksi peubah acak dari X yang saling bebas dan berdistribusi identik (*independent and identically distributed*; dikenal sebagai **sampel acak**); realisasi dari sampel acak dikenal sebagai **data risiko** atau data kerugian (*loss data*). Misalkan X adalah risiko acak yang menyatakan banyak/nilai kerugian. Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n adalah sampel acak dari X yang memiliki suatu distribusi $\mathcal{D}(\theta)$ dengan parameter θ . Distribusi statistik dari X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, identik (memiliki parameter yang sama) dengan distribusi statistik dari X .

Di bidang keuangan, risiko acak dapat merepresentasikan **imbal hasil** (*return*) atau keuntungan-kerugian (*profit-and-loss*), R . Berbeda dengan sampel acak untuk data kerugian, data imbal hasil umumnya dimodelkan melalui koleksi peubah acak dari suatu **proses stokastik**. Misalkan $\{R_t\}$ adalah suatu proses stokastik yang merepresentasikan (perilaku) risiko imbal hasil setiap waktu $t \geq 0$. Koleksi peubah acak dari proses stokastik imbal hasil tersebut ialah R_1, R_2, \dots, R_n yang menyatakan peubah acak imbal hasil pada waktu ke-1, ke-2, hingga ke- n .

Distribusi statistik dari $R_t | R_{t-1}, R_{t-2}, \dots, R_1$ adalah **distribusi bersyarat** (*conditional distribution*) yang dapat memiliki mean bersyarat dan variansi bersyarat yang berubah menurut waktu t , yaitu $\mu_t = E(R_t | \cdot)$ dan $\sigma_t^2 = \text{Var}(R_t | \cdot)$; σ_t^2 disebut sebagai **volatilitas**, dan R_t bersifat **heteroskedastis**. Sebagai contoh, μ_t dan σ_t^2 mengikuti persamaan

$$\mu_t = a_0 + a_1 R_{t-1}, \quad (2.8)$$

$$\sigma_t^2 = b_0 + b_1 (R_{t-1} - \mu_{t-1})^2, \quad (2.9)$$

untuk suatu $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $b_0 > 0$, dan $b_1 \geq 0$. Dalam hal ini, R_t dikatakan mengikuti suatu kombinasi dari model AR (*autoregressive*, orde 1, untuk

komponen μ_t) dan ARCH (*autoregressive conditional heteroscedastic*, orde 1, untuk komponen σ_t^2). Untuk menjamin bahwa $\{R_t\}$ bersifat stasioner (lemah), haruslah $|a_1| < 1$ dan $b_1 < 1$ (Engle, 1982; Tsay, 2010). Secara khusus, a_1 dan b_1 berturut-turut menyatakan ukuran **persistensi mean bersyarat** dan **persistensi volatilitas**. Dengan kata lain, a_1 mengukur pengaruh imbal hasil pada waktu sebelumnya, R_{t-1} , terhadap mean bersyarat pada waktu sekarang, μ_t , sedangkan b_1 mengukur pengaruh imbal hasil kuadrat pada waktu sebelumnya, $(R_{t-1} - \mu_{t-1})^2$, terhadap volatilitas pada waktu sekarang, σ_t^2 .

Komponen σ_t^2 pada Persamaan (2.9) dapat diperumum dengan memerhatikan pengaruh volatilitas pada waktu sebelumnya, σ_{t-1}^2 , yaitu $\sigma_t^2 = b_0 + b_1(R_{t-1} - \mu_{t-1})^2 + b_2\sigma_{t-1}^2$ (*generalized ARCH (GARCH)*, orde (1, 1); Bollerslev, 1986). Untuk membedakan pengaruh “ $R_{t-1} - \mu_{t-1} < 0$ ” dan “ $R_{t-1} - \mu_{t-1} \geq 0$ ” terhadap σ_t^2 , persamaan σ_t^2 dapat dikembangkan lebih lanjut menjadi

$$\sigma_t^2 = b_0 + b_1(R_{t-1} - \mu_{t-1})^2 + b_2\sigma_{t-1}^2 + b_3(R_{t-1} - \mu_{t-1})^2 I_{\{R_{t-1} < \mu_{t-1}\}}, \quad (2.10)$$

untuk suatu fungsi indikator $I_{\{R_{t-1} < \mu_{t-1}\}}$ yang memiliki nilai satu jika “ $R_{t-1} - \mu_{t-1} < 0$ ” atau nol jika “ $R_{t-1} - \mu_{t-1} \geq 0$ ” (Glosten-Jagannathan-Runkle/GJR-GARCH, orde (1, 1); Glosten dkk., 1993). Jika $b_3 > 0$, maka “ $R_{t-1} - \mu_{t-1} < 0$ ” memberikan pengaruh yang lebih besar terhadap σ_t^2 , dan σ_t^2 dikatakan bersifat **asimetris**. Sebaliknya, jika $b_3 < 0$, maka σ_t^2 bersifat **asimetris terbalik** (*inverse asymmetric*).

Secara umum, R_t dapat dinyatakan sebagai

$$R_t = \mu_t + \sqrt{\sigma_t^2} \varepsilon_t, \quad (2.11)$$

dengan $\{\varepsilon_t\}$ adalah **proses inovasi** yang memiliki distribusi kontinu standar (dengan mean nol dan variansi satu), yaitu $\varepsilon_t \sim \mathcal{D}(0, 1)$; akibatnya, distribusi bersyarat dari $R_t | R_{t-1}, R_{t-2}, \dots, R_1$ adalah $\mathcal{D}(\mu_t, \sigma_t^2)$. Distribusi kontinu standar $\mathcal{D}(0, 1)$ yang sering digunakan antara lain distribusi normal standar, $\mathcal{N}(0, 1)$, dan distribusi t standar, $t(0, 1, \nu)$, yang memiliki fungsi peluang, berturut-turut,

$$f_{\varepsilon_t}^{\mathcal{N}}(\varepsilon) = \phi(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

$$f_{\varepsilon_t}^t(\varepsilon; \nu) = t(\varepsilon; \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\nu-2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

dengan $\nu > 2$ menyatakan derajat kebebasan, dan Γ adalah fungsi gama. Fungsi distribusi normal standar dan t standar tidak dapat dinyatakan secara eksplisit.

Sebagai alternatif, ε_t dapat diasumsikan mengikuti **distribusi SU Johnson standar** yang diperoleh melalui transformasi dari distribusi normal standar. Jika

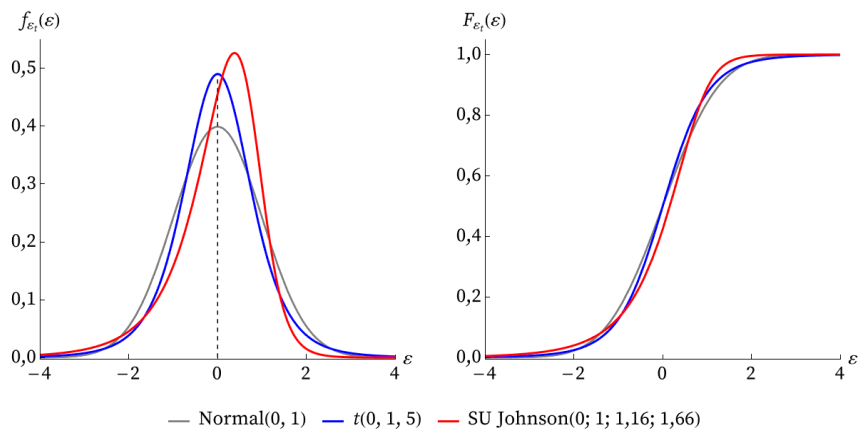
$$\varepsilon_t = \zeta(\gamma, \delta) + \eta(\gamma, \delta) \sinh\left(\frac{Z_t - \gamma}{\delta}\right), \quad (2.14)$$

dengan $Z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ serta $\zeta(\gamma, \delta) = \eta(\gamma, \delta)e^{2\delta^{-2}} \sinh\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$ dan $\eta(\gamma, \delta) = \left[\frac{1}{2}(e^{\delta^{-2}} - 1) \left(e^{\delta^{-2}} \cosh\left(2\frac{\gamma}{\delta}\right) + 1\right)\right]^{-1}$ untuk suatu $\gamma \in \mathbb{R}$ dan $\delta > 0$, maka ε_t dikatakan memiliki distribusi SU Johnson standar $\mathcal{J}^{\text{SU}}(0, 1, \gamma, \delta)$ (Hakim dkk., 2022; Hakim dan Syuhada, 2023). Fungsi peluang dan fungsi distribusinya, berturut-turut, adalah

$$f_{\varepsilon_t}^{\text{SU}}(\varepsilon; \gamma, \delta) = \frac{\delta}{\eta(\gamma, \delta)} \frac{\phi\left[\gamma + \delta \sinh^{-1}\left(\frac{\varepsilon - \zeta(\gamma, \delta)}{\eta(\gamma, \delta)}\right)\right]}{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon - \zeta(\gamma, \delta)}{\eta(\gamma, \delta)}\right)^2\right]^{1/2}}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (2.15)$$

$$F_{\varepsilon_t}^{\text{SU}}(\varepsilon; \gamma, \delta) = \Phi\left[\gamma + \delta \sinh^{-1}\left(\frac{\varepsilon - \zeta(\gamma, \delta)}{\eta(\gamma, \delta)}\right)\right], \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (2.16)$$

dengan $\Phi(\cdot)$ adalah fungsi distribusi normal standar. Grafik fungsi peluang dan fungsi distribusi dari $\mathcal{J}^{\text{SU}}(0; 1; 1,16; 1,66)$ beserta perbandingannya terhadap fungsi peluang dan fungsi distribusi dari $\mathcal{N}(0, 1)$ dan $t(0, 1, 5)$ diberikan pada Gambar 2.3. Perhatikan bahwa distribusi $\mathcal{N}(0, 1)$ dan $t(0, 1, 5)$ bersifat simetris, sedangkan distribusi $\mathcal{J}^{\text{SU}}(0; 1; 1,16; 1,66)$ bersifat menceng dengan koefisien kemencengan $-1,5$. Selain itu, distribusi $t(0, 1, 5)$ dan $\mathcal{J}^{\text{SU}}(0; 1; 1,16; 1,66)$ berekor tebal dengan koefisien kurtosis yang bernilai sembilan.



Gambar 0.3 Grafik fungsi peluang dan fungsi distribusi dari distribusi normal standar, t standar, dan SU Johnson standar.

3 UKURAN RISIKO

Risiko acak pada waktu yang akan datang dapat diprediksi melalui **ukuran risiko** (*risk measure*), ϱ . Ukuran risiko adalah fungsi yang memetakan himpunan risiko acak \mathcal{X} , ke himpunan bilangan real \mathbb{R} ,

$$\varrho: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ukuran risiko ϱ bersifat **koheren** jika ϱ memenuhi empat aksioma berikut (Artzner dkk., 1999; Tse, 2009):

1. TI (*translational invariance*): $\varrho(X + a) = \varrho(X) + a$ untuk setiap $X \in \mathcal{X}$ dan $a \in \mathbb{R}$; aksioma ini menyatakan bahwa peningkatan atau penurunan risiko sebesar a mengakibatkan peningkatan atau penurunan ukuran risikonya sebesar a pula;
2. S (*subadditivity*): $\varrho(X + Y) \leq \varrho(X) + \varrho(Y)$ untuk setiap $X, Y \in \mathcal{X}$; aksioma ini mengindikasikan bahwa ukuran risiko dari gabungan dua risiko tidak melebihi jumlahan ukuran risiko dari masing-masing risiko; artinya, individu, perusahaan asuransi, atau institusi keuangan haruslah menggabungkan risiko-risikonya daripada memperlakukan risiko-risiko tersebut secara terpisah;
3. PH (*positive homogeneity*): $\varrho(aX) = a \varrho(X)$ untuk setiap $X \in \mathcal{X}$ dan $a > 0$; aksioma ini menjamin bahwa perubahan satuan/mata uang dari risiko tidak mengubah ukuran risikonya;
4. M (*monotonicity*): $\varrho(X) \leq \varrho(Y)$ untuk setiap $X, Y \in \mathcal{X}$ dengan $X \leq Y$; aksioma ini menyatakan bahwa jika suatu risiko tidak melebihi risiko lain, maka ukuran risiko dari risiko pertama juga tidak akan melebihi ukuran risiko dari risiko kedua.

Ukuran risiko yang koheren diperlukan bagi individu, perusahaan asuransi, atau institusi keuangan untuk mengelola risiko secara efektif.

Ukuran risiko yang telah dikenal adalah mean μ dan deviasi standar $\sqrt{\sigma^2}$. Ukuran risiko dapat juga merupakan fungsi mean dan deviasi standar yang dikenal sebagai **SDPP** (*standard-deviation principle premium*), yaitu

$$\text{SDPP}_{1-\alpha}(X) = \mu + \Phi^{-1}(1 - \alpha) \sqrt{\sigma^2}, \quad (3.1)$$

untuk suatu $\alpha \in (0, 1)$, dengan Φ^{-1} adalah ukuran risiko dari risiko acak normal standar. Ukuran risiko SDPP memiliki kemudahan/fleksibilitas dalam praktik perhitungan pada data riil (Syuhada dkk., 2022c, 2024b). Namun, SDPP tidak koheren karena ukuran risiko ini tidak memenuhi Aksioma M (Tse, 2009).

Value-at-Risk (VaR)

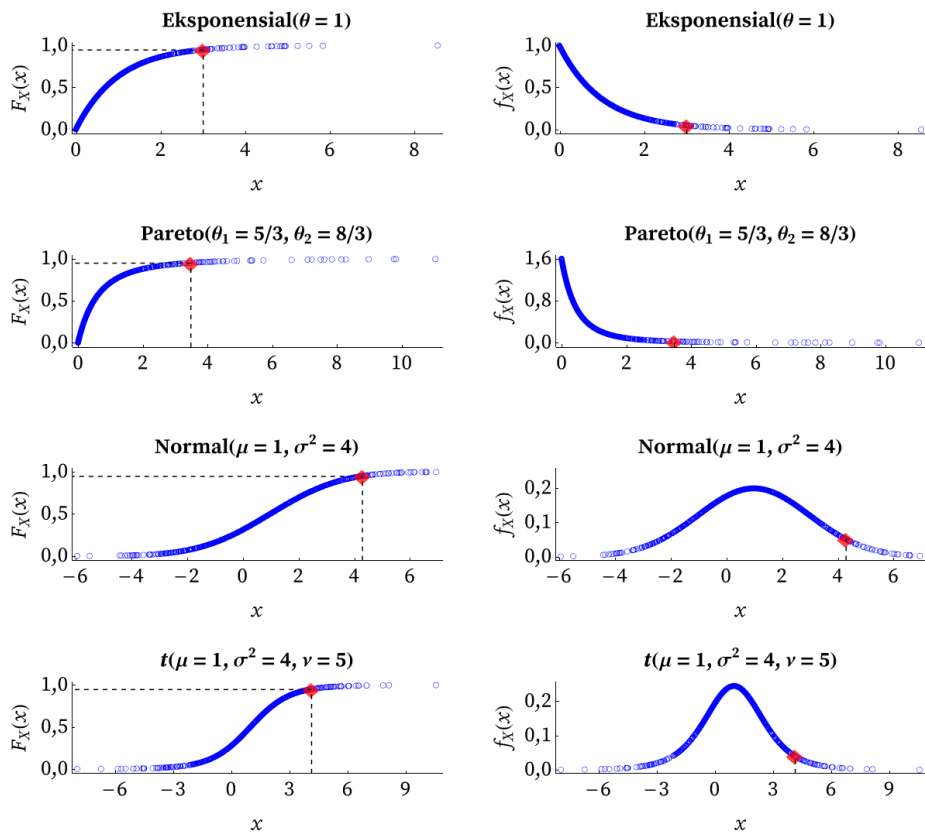
Value-at-Risk (VaR) adalah ukuran risiko yang berbasis peluang; ukuran risiko VaR sangat populer dan telah digunakan secara luas. Namun, VaR tidak bersifat koheren karena VaR tidak memenuhi Aksioma S. Secara khusus, VaR dari risiko acak normal adalah SDPP. Ukuran risiko lain yang merupakan pengembangan VaR adalah **Expected Shortfall** (ES) atau *Tail VaR* (TVaR) atau *Conditional Tail Expectation* (CTE) yang bersifat koheren (Artzner dkk., 1999; Tse, 2009; McNeil dkk., 2015).

VaR dapat diterjemahkan sebagai risiko terbesar/maksimal yang akan dihadapi individu, perusahaan asuransi, atau institusi keuangan dengan tingkat keyakinan tertentu. Hal ini relevan dengan **kuantil** yang telah dijelaskan sebelumnya. Nilai risiko terbesar/maksimal ini dinyatakan secara probabilistik melalui **invers fungsi distribusi**. Dengan demikian, untuk sebarang risiko acak X dengan fungsi distribusi F_X , ukuran risiko VaR dari X dapat dihitung melalui formula berikut.

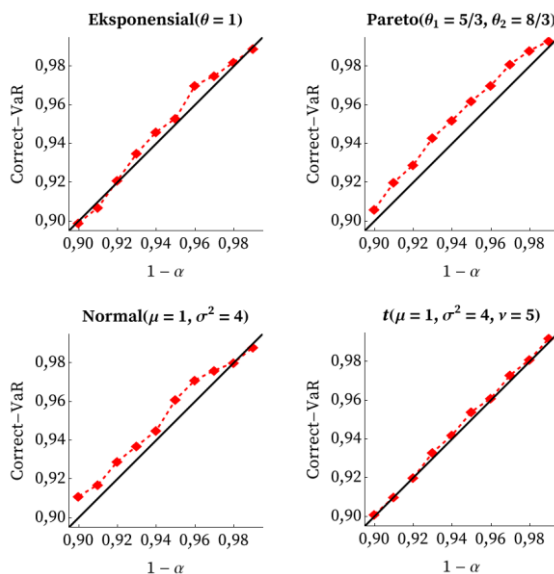
$$\text{VaR}_{1-\alpha}(X) = F_X^{-1}(1 - \alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R}: F_X(x) \geq 1 - \alpha\}, \quad (3.2)$$

untuk suatu $\alpha \in (0, 1)$, dengan $F_X^{-1}(\cdot)$ adalah invers fungsi distribusi dari X (Tse, 2009; McNeil dkk., 2015). Menurut teori prediksi statistik (*statistical prediction theory*), VaR adalah aplikasi dari konsep prediksi statistik. Secara khusus, VaR adalah batas atas dari suatu selang prediksi.

Menurut Syuhada dkk. (2023a), VaR dapat dihitung sebagai berikut. Misalkan terdapat koleksi risiko acak X_1, X_2, \dots, X_n dari X . VaR dihitung dengan menentukan realisasi dari koleksi risiko acak tersebut dan mengurutkannya menjadi $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$. Selanjutnya, VaR ditetapkan melalui nilai $F_X(x_{(j)})$, untuk suatu j , sehingga nilai fungsi distribusi tersebut setidaknya $1 - \alpha$. Sebagai ilustrasi, posisi prediksi $\text{VaR}_{0,95}$ sebagai nilai observasi dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t diberikan pada Gambar 3.1.



Gambar 0.4 Posisi prediksi $\text{VaR}_{0,95}$ dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t.



Gambar 0.5 Keakuratan prediksi VaR dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t.

Setelah prediksi VaR dihitung, **keakuratan prediksi** dapat diuji (*backtesting*) dengan cara menentukan rasio “banyak observasi risiko yang bernilai lebih kecil daripada atau sama dengan prediksi VaR” relatif terhadap “total banyak observasi risiko”. Selanjutnya, nilai rasio ini, yang disebut sebagai **Correct-VaR**, dibandingkan dengan tingkat keyakinan $1 - \alpha$. Jika selisih keduanya semakin kecil, maka prediksi VaR dikatakan semakin akurat. Sebagai ilustrasi, keakuratan prediksi VaR dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t diberikan pada Gambar 3.2.

Secara teoretis, misalkan distribusi dari risiko acak X bergantung pada suatu parameter, θ , yang tidak diketahui. Kemudian, koleksi risiko acak X_1, X_2, \dots, X_n dari X digunakan untuk menentukan suatu penaksir, $\hat{\theta}$, dari θ . Karena $\text{VaR}_{1-\alpha;\theta}(X) = q_X(1 - \alpha; \theta)$, prediksi VaR dapat ditentukan sebagai berikut: $\text{VaR}_{1-\alpha;\hat{\theta}}(X) = q_X(1 - \alpha; \hat{\theta})$, yang disebut sebagai prediksi **estimative-VaR** (Syuhada dkk., 2020). Keakuratan prediksi estimative-VaR tersebut dapat diukur dengan menghitung **peluang cakupan** (*coverage probability*), yaitu

$$P_{\theta} \left(X \leq \text{VaR}_{1-\alpha;\hat{\theta}}(X) \right) = E_{\theta} \left[F_X \left(\text{VaR}_{1-\alpha;\hat{\theta}}(X); \theta \right) \right]. \quad (3.3)$$

Selisih antara peluang cakupan dan tingkat keyakinan $1 - \alpha$ memenuhi

$$\Delta(\theta) = P_{\theta} \left(X \leq \text{VaR}_{1-\alpha;\hat{\theta}}(X) \right) - (1 - \alpha) = O(n^{-1}). \quad (3.4)$$

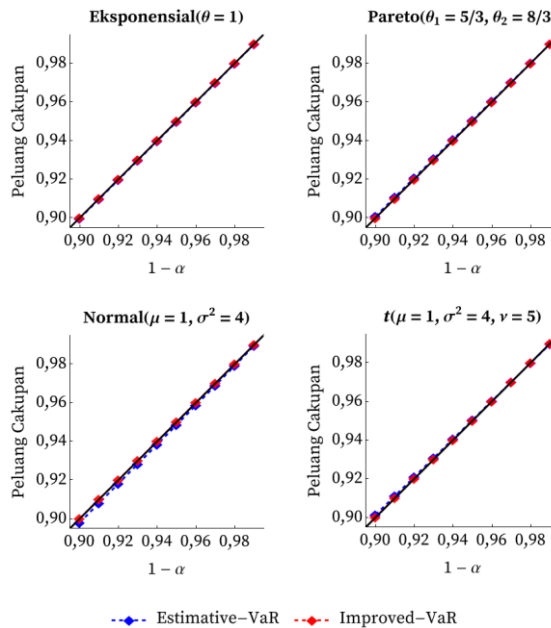
Artinya, jika risiko-risiko acak yang digunakan semakin banyak, maka selisih $\Delta(\theta)$ semakin dekat dengan nol, sehingga prediksi estimative-VaR semakin akurat.

Improved-VaR

Ukuran risiko VaR telah dikembangkan dengan beberapa arah (*in several directions*). Pengembangan pertama adalah **improved-VaR**, yaitu ukuran risiko VaR yang dimodifikasi sehingga selisih antara peluang cakupan dan tingkat keyakinan $1 - \alpha$ menjadi terbatas di $O(n^{-3/2})$. Kabaila dan Syuhada (2008, 2010), Syuhada dan Saputra (2015), serta Syuhada (2020) mengusulkan prediksi improved-VaR sebagai berikut.

$$+VaR_{1-\alpha;\hat{\theta}}(X) = VaR_{1-\alpha;\hat{\theta}}(X) - \frac{\Delta(\hat{\theta})}{f_X(VaR_{1-\alpha;\hat{\theta}}(X); \hat{\theta})}, \quad (3.5)$$

dengan $P_{\theta} \left(X \leq +VaR_{1-\alpha;\hat{\theta}}(X) \right) - (1 - \alpha) = O(n^{-3/2})$. Perbandingan keakuratan prediksi improved-VaR, relatif terhadap prediksi estimative-VaR, dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t diberikan pada Gambar 3.3. Terlihat bahwa prediksi improved-VaR memiliki peluang cakupan yang lebih dekat dengan tingkat keyakinan $1 - \alpha$ yang ditetapkan.



Gambar 0.6 Keakuratan prediksi estimative-VaR dan improved-VaR dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t .

Expected Shortfall (ES)

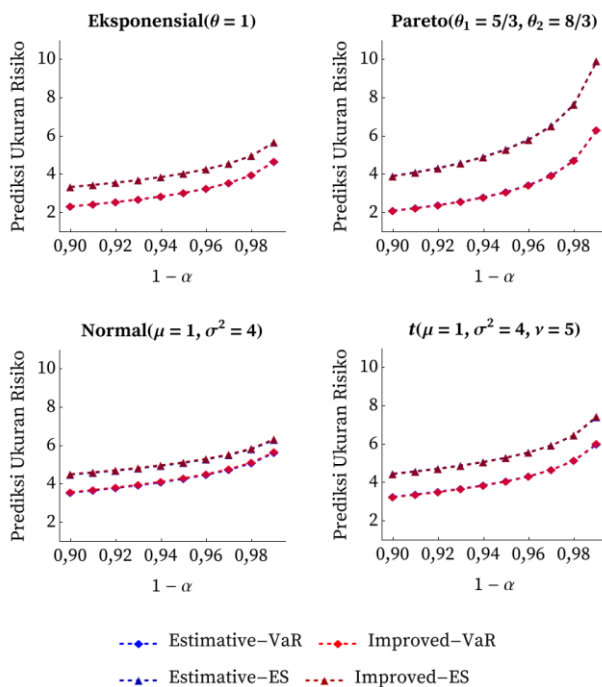
Pengembangan kedua VaR adalah dengan menentukan ekspektasi atau mean dari semua nilai observasi risiko yang lebih besar daripada VaR. Ukuran risiko ini disebut sebagai **Expected Shortfall** (ES) atau Tail VaR (TVaR) atau Conditional Tail Expectation (CTE) (Artzner dkk., 1999),

$$ES_{1-\alpha;\theta}(X) = E_{\theta} \left(X \mid X > VaR_{1-\alpha;\theta}(X) \right). \quad (3.6)$$

Ukuran risiko ES tersebut memberikan informasi mengenai nilai-nilai risiko yang melebihi VaR (dengan diwakili oleh meannya). Dengan demikian, ES

dapat mengatasi kelemahan VaR yang hanya bergantung pada tingkat keyakinan atau peluang terjadinya nilai risiko.

Sebagai alternatif untuk **estimative-ES**, $ES_{1-\alpha; \hat{\theta}}(X)$, Rohmawati dan Syuhada (2015) serta Syuhada dkk. (2022a) mengusulkan ukuran risiko **improved-ES**, ${}^+ES_{1-\alpha; \hat{\theta}}(X)$. Prediksi nilai risiko maksimal, (estimative- dan improved-) VaR, serta prediksi mean observasi risiko yang lebih besar daripada VaR, yaitu (estimative- dan improved-) ES, dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t diberikan pada Gambar 3.4.



Gambar 0.7 Prediksi nilai risiko maksimal, (estimative- dan improved-) VaR, serta prediksi mean observasi risiko yang lebih besar daripada VaR, (estimative- dan improved-) ES, dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t .

VaR dan ES Berbasis Kuantil dan Ekspektal

Ukuran risiko berikutnya dihitung berdasarkan basis formulasi. Sejauh ini, formulasi VaR dilakukan menggunakan basis **kuantil** (*quantile*), yaitu $qVaR_{1-\alpha; \theta}(X) = q_X(1 - \alpha; \theta)$. Melalui ekspektasi fungsi kerugian linier sepotong-sepotong (*piecewise*), $q_X(1 - \alpha; \theta)$ dapat dirumuskan sebagai berikut (Kuan dkk., 2009):

$$q_X(1 - \alpha; \theta) = \arg \min_{w \in \mathbb{R}} E_\theta[\alpha(X - w)_- + (1 - \alpha)(X - w)_+], \quad (3.7)$$

dengan $y_- = (-y) \vee 0 = \max\{-y, 0\}$ dan $y_+ = y \vee 0 = \max\{y, 0\}$. Basis kuantil ini mengakibatkan bahwa ukuran risiko qVaR memenuhi $P_\theta(X \leq q\text{VaR}_{1-\alpha; \theta}(X)) = 1 - \alpha$, sehingga ukuran risiko tersebut hanya bergantung pada tingkat keyakinan atau peluang terjadinya nilai risiko.

Menurut Kuan dkk. (2009), formulasi VaR dapat juga dilakukan menggunakan basis **ekspektil** (*expectile*) melalui ekspektasi fungsi kerugian kuadrat sepotong-sepotong, yaitu

$$\begin{aligned} e\text{VaR}_{1-\alpha; \theta}(X) &= e_X(1 - \alpha; \theta) \\ &= \arg \min_{w \in \mathbb{R}} E_\theta[\alpha(X - w)_-^2 + (1 - \alpha)(X - w)_+^2]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Basis ekspektil ini mengakibatkan bahwa ukuran risiko eVaR memenuhi $E_\theta(|X - e\text{VaR}_{1-\alpha; \theta}(X)| | I_{\{X \leq e\text{VaR}_{1-\alpha; \theta}(X)\}}) / E_\theta(|X - e\text{VaR}_{1-\alpha; \theta}(X)|) = 1 - \alpha$. Artinya, ukuran risiko tersebut bergantung pada seluruh magnitudo risiko selain peluang kejadiannya.

Syuhada dkk. (2023 (a)) mengusulkan algoritma perhitungan prediksi VaR dan ES berbasis kuantil dan ekspektil dengan prinsip ekspektasi. Algoritma yang dihasilkan adalah sebagai berikut.

Algoritma 1 (VaR berbasis kuantil, qVaR). Pandang suatu simulasi yang terdiri atas m pengulangan yang saling bebas; pengulangan ke- k ($k = 1, 2, \dots, m$) terdiri atas langkah-langkah berikut.

- **Langkah 1:** Bangkitkan suatu realisasi sampel acak x_1, x_2, \dots, x_n dari X dengan parameter θ tertentu.
- **Langkah 2:** Untuk suatu $\alpha \in (0, 1)$, cari $\widehat{q\text{VaR}}_{1-\alpha; \theta}^{(k)}(X)$ sehingga

$$\widehat{q\text{VaR}}_{1-\alpha; \theta}^{(k)}(X) = \arg \min_{w \in \mathbb{R}} \frac{\sum_{j=1}^n [\alpha(x_j - w)_- + (1 - \alpha)(x_j - w)_+] f_X(x_j; \theta)}{\sum_{j=1}^n f_X(x_j; \theta)}.$$

Dengan demikian, prediksi qVaR dengan prinsip ekspektasi adalah mean dari $\{\widehat{q\text{VaR}}_{1-\alpha; \theta}^{(k)}(X)\}_{k=1}^m$ yaitu $\widehat{q\text{VaR}}_{1-\alpha; \theta}(X) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \widehat{q\text{VaR}}_{1-\alpha; \theta}^{(k)}(X)$.

Algoritma 2 (VaR berbasis ekspektal, eVaR). Pandang suatu simulasi yang terdiri atas m pengulangan yang saling bebas; pengulangan ke- k ($k = 1, 2, \dots, m$) terdiri atas langkah-langkah berikut.

- **Langkah 1:** Bangkitkan suatu realisasi sampel acak x_1, x_2, \dots, x_n dari X dengan parameter θ tertentu.
- **Langkah 2:** Untuk suatu $\alpha \in (0, 1)$, cari $\widehat{eVaR}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X)$ sehingga

$$\widehat{eVaR}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X) = \arg \min_{w \in \mathbb{R}} \frac{\sum_{j=1}^n \left[\alpha(x_j - w)_-^2 + (1 - \alpha)(x_j - w)_+^2 \right] f_X(x_j; \theta)}{\sum_{j=1}^n f_X(x_j; \theta)}.$$

Dengan demikian, prediksi eVaR dengan prinsip ekspektasi adalah mean dari $\left\{ \widehat{eVaR}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X) \right\}_{k=1}^m$ yaitu $\widehat{eVaR}_{1-\alpha;\theta}(X) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \widehat{eVaR}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X)$.

Algoritma 3 (ES berbasis kuantil, qES). Setelah $\widehat{qVaR}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X)$ diperoleh dari pengulangan ke- k ($k = 1, 2, \dots, m$) pada Algoritma 1, pengulangan tersebut dilanjutkan dengan langkah-langkah berikut.

- **Langkah 1:** Dari realisasi sampel acak x_1, x_2, \dots, x_n , tentukan nilai fungsi indikator $I_{\{x_j > \widehat{qVaR}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X)\}}, j = 1, 2, \dots, n$.
- **Langkah 2:** Hitung

$$\widehat{qES}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X) = \frac{\sum_{j=1}^n x_j f_X(x_j; \theta) I_{\{x_j > \widehat{qVaR}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X)\}}}{\sum_{j=1}^n f_X(x_j; \theta) I_{\{x_j > \widehat{qVaR}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X)\}}}.$$

Dengan demikian, prediksi qES dengan prinsip ekspektasi adalah mean dari $\left\{ \widehat{qES}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X) \right\}_{k=1}^m$ yaitu $\widehat{qES}_{1-\alpha;\theta}(X) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \widehat{qES}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X)$.

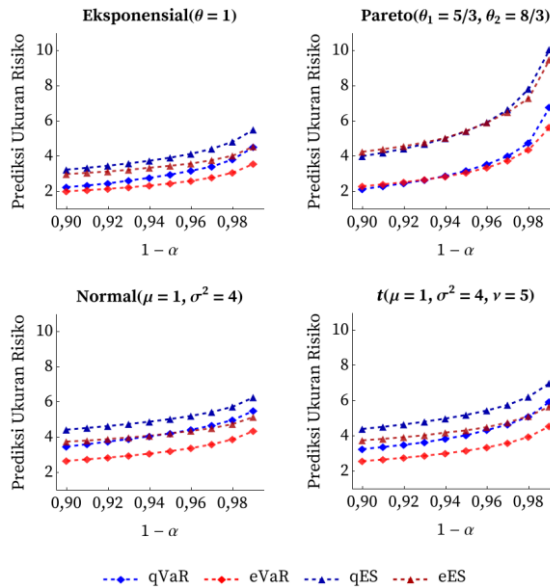
Algoritma 4 (ES berbasis ekspektal, eES). Setelah $\widehat{eVaR}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X)$ diperoleh dari pengulangan ke- k ($k = 1, 2, \dots, m$) pada Algoritma 2, pengulangan tersebut dilanjutkan dengan langkah-langkah berikut.

- **Langkah 1:** Dari realisasi sampel acak x_1, x_2, \dots, x_n , tentukan nilai fungsi indikator $I_{\{x_j > \widehat{eVaR}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X)\}}, j = 1, 2, \dots, n$.
- **Langkah 2:** Hitung

$$\widehat{eES}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X) = \frac{\sum_{j=1}^n x_j f_X(x_j; \theta) I_{\{x_j > e\widehat{VaR}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X)\}}}{\sum_{j=1}^n f_X(x_j; \theta) I_{\{x_j > e\widehat{VaR}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X)\}}}$$

Dengan demikian, prediksi eES dengan prinsip ekspektasi adalah mean dari $\{\widehat{eES}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X)\}_{k=1}^m$ yaitu $e\widehat{ES}_{1-\alpha;\theta}(X) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \widehat{eES}_{1-\alpha;\theta}^{(k)}(X)$.

Berdasarkan algoritma-algoritma di atas, hasil perhitungan prediksi qVaR, eVaR, qES, dan eES dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t diberikan pada Gambar 3.5.



Gambar 0.8 Prediksi ukuran risiko berbasis kuantil (qVaR, qES) dan ekspektil (eVaR, eES) dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t .

Perluasan ES

Selanjutnya, pengembangan ukuran risiko dapat dilakukan dengan memanfaatkan batasan risiko acak yang menjadi syarat penentuan ES. Misalkan risiko acak X diukur menggunakan ukuran risiko, ES, dengan memerhatikan risiko acak bersyarat $X | X > VaR_{1-\alpha}(X)$ sebagai berikut.

$$ES_{1-\alpha}(X) = E(X | X > VaR_{1-\alpha}(X)) = E(X | VaR_{1-\alpha}(X) < X < \infty), \quad (3.9)$$

yang menggunakan batas bawah $\text{VaR}_{1-\alpha}(X)$. Jadhav dkk. (2009, 2013) serta Cont dkk. (2010) memberikan batas atas $\text{VaR}_{1-\alpha^*}(X)$, sehingga diperoleh **Modified ES** (MES) atau Range VaR (RVaR), yaitu

$$\text{MES}_{1-\alpha,1-\alpha^*}(X) = E(X \mid \text{VaR}_{1-\alpha}(X) < X < \text{VaR}_{1-\alpha^*}(X)), \quad (3.10)$$

dengan $0 < \alpha^* < \alpha < 1$ (atau $0 < 1 - \alpha < 1 - \alpha^* < 1$). Sementara itu, Brahim dkk. (2018) serta Ji dkk. (2021) mengusulkan **Copula ES** (CES) atau Joint ES (JES) dengan memerhatikan risiko acak X jika diberikan risiko acak lain, Y , yaitu

$$\text{CES}_{1-\alpha|1-\beta}(X \mid Y) = E(X \mid \text{VaR}_{1-\alpha}(X) < X < \infty, \text{VaR}_{1-\beta}(Y) < Y < \infty), \quad (3.11)$$

dengan $0 < \alpha, \beta < 1$. Selanjutnya, Josaphat dan Syuhada (2021), Josaphat dkk. (2021), serta Syuhada dkk. (2022b) memperkenalkan ukuran risiko baru, **Dependent ES** (DES), yaitu

$$\begin{aligned} \text{DES}_{1-\alpha,1-\alpha^*|1-\beta,1-\beta^*}(X \mid Y) \\ = E(X \mid \text{VaR}_{1-\alpha}(X) < X < \text{VaR}_{1-\alpha^*}(X), \text{VaR}_{1-\beta}(Y) < Y < \text{VaR}_{1-\beta^*}(Y)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

yang mengawetkan sifat koherensi ukuran risiko, dengan $0 < \alpha^* < \alpha < 1$ (atau $0 < 1 - \alpha < 1 - \alpha^* < 1$) dan $0 < \beta^* < \beta < 1$ (atau $0 < 1 - \beta < 1 - \beta^* < 1$). Suatu copula $C_{U,V}(\cdot, \cdot)$, yang merupakan fungsi distribusi bersama dari $U = F_X(X) \sim \mathcal{U}(0, 1)$ dan $V = F_Y(Y) \sim \mathcal{U}(0, 1)$, digunakan untuk menentukan fungsi distribusi bersama

$$F_{X,Y}(x, y) = C_{U,V}(F_X(x), F_Y(y)) = C_{U,V}(u, v) \quad (3.13)$$

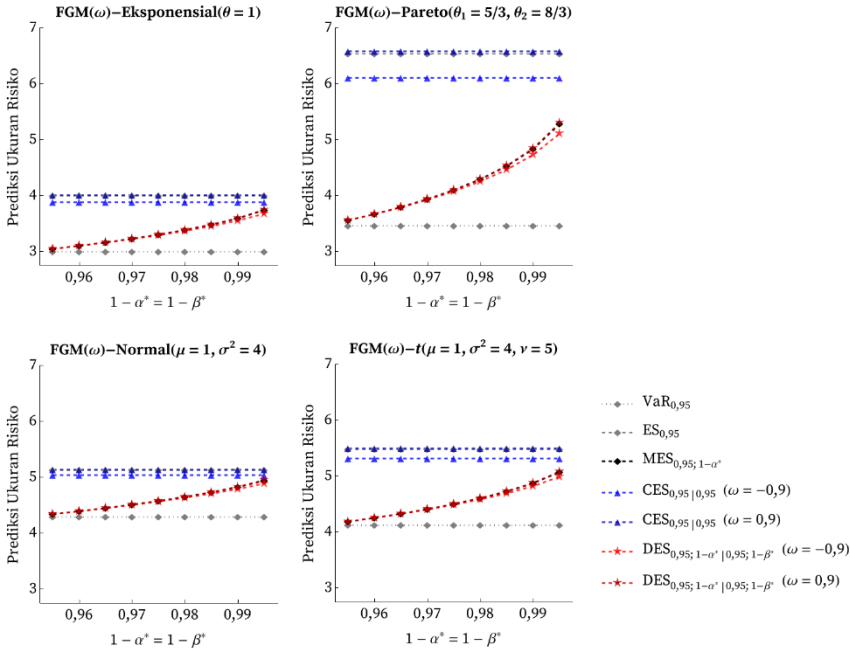
(dan fungsi distribusi bersyaratnya). Melalui copula Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM), $C_{U,V}^{\text{FGM}}(u, v; \omega) = uv[1 + \omega(1 - u)(1 - v)]$, dengan parameter $\omega \in [-1, 1]$, nilai $\text{DES}_{0,95; 1-\alpha^*|0,95; 1-\beta^*}(X \mid Y)$ dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t serta perbandingannya terhadap $\text{VaR}_{0,95}(X)$, $\text{ES}_{0,95}(X)$, $\text{MES}_{0,95; 1-\alpha^*}(X)$, dan $\text{CES}_{0,95|0,95}(X \mid Y)$ diberikan pada Gambar 3.6. Terlihat bahwa nilai $\text{MES}_{0,95; 1-\alpha^*}(X)$ dan $\text{DES}_{0,95; 1-\alpha^*|0,95; 1-\beta^*}(X \mid Y)$ berada di antara nilai $\text{VaR}_{0,95}(X)$ dan $\text{ES}_{0,95}(X)$ karena keduanya didefinisikan pada $\text{VaR}_{0,95}(X) < X < \text{VaR}_{1-\alpha^*}(X)$.

VaR dengan Momen Orde Tinggi

Untuk suatu risiko acak X dengan mean μ_X dan variansi σ_X^2 , perhatikan bahwa ukuran risiko VaR dari X dapat dituliskan sebagai

$$\text{VaR}_{1-\alpha}(X) = \mu_X + \sqrt{\sigma_X^2} z_{1-\alpha}, \quad (3.14)$$

dengan $z_{1-\alpha} = q_Z(1-\alpha)$ menyatakan kuantil dari risiko acak standar $Z = (X - \mu_X)/\sqrt{\sigma_X^2}$.



Gambar 0.9 $\text{DES}_{0,95; 1-\alpha^*|0,95; 1-\beta^*}$ dari risiko acak eksponensial, Pareto, normal, dan t berbasis copula FGM serta perbandingannya terhadap $\text{VaR}_{0,95}$, $\text{ES}_{0,95}$, $\text{MES}_{0,95; 1-\alpha^*}$, dan $\text{CES}_{0,95|0,95}$.

Dengan memanfaatkan **ekspansi Cornish-Fisher (CF)**, kuantil $z_{1-\alpha}$ dapat diekspansi dalam kuantil normal standar $\Phi_{1-\alpha}^{-1} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$, yaitu

$$\begin{aligned} \text{CF}_{Z_{1-\alpha}}(\xi_X, \kappa_X) &= \text{He}_1(\Phi_{1-\alpha}^{-1}) + \frac{\xi_X}{6} \text{He}_2(\Phi_{1-\alpha}^{-1}) + \frac{\kappa_X - 3}{24} \text{He}_3(\Phi_{1-\alpha}^{-1}) \\ &\quad - \frac{\xi_X^2}{36} (\text{He}_1(\Phi_{1-\alpha}^{-1}) + 2\text{He}_3(\Phi_{1-\alpha}^{-1})). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dalam hal ini, $\text{He}_1(z) = z$, $\text{He}_2(z) = z^2 - 1$, dan $\text{He}_3(z) = z^3 - 3z$ adalah polinomial-polinomial Hermite, sedangkan ξ_X dan κ_X berturut-turut adalah koefisien kemencengan dan koefisien kurtosis dari X (Cornish dan Fisher,

1938; Mauleon dan Perote, 2000). Dengan demikian, VaR dapat dimodifikasi dengan melibatkan momen-momen orde tinggi tersebut sebagai berikut (Christoffersen dan Gonçaves, 2005):

$${}^{\text{CF}}\text{VaR}_{1-\alpha}(X) = \mu_X + \sqrt{\sigma_X^2} {}^{\text{CF}}Z_{1-\alpha}(\xi_X, \kappa_X). \quad (3.16)$$

Ukuran Risiko Sistemis

Selanjutnya, ukuran risiko VaR dapat dihitung untuk risiko acak X jika diberikan nilai VaR dari risiko acak lain, Y , sehingga diperoleh ukuran risiko **Conditional VaR** (CoVaR), yaitu

$$\text{CoVaR}_{1-\alpha|1-\beta}(X | Y) = \text{VaR}_{1-\alpha}(X | Y = \text{VaR}_{1-\beta}(Y)). \quad (3.17)$$

CoVaR diperkenalkan oleh Adrian dan Brunnermeier (2016) untuk mengukur **risiko sistemis**, yaitu risiko yang menyebar dari suatu institusi keuangan ke institusi keuangan lain. Hakim dkk. (2022) serta Hakim dan Syuhada (2023) mempertimbangkan perluasan CoVaR, **Multiple CoVaR** (MCoVaR), dari risiko acak X jika diberikan syarat $\mathbf{Y} = \mathbf{VaR}_{1-\beta}(\mathbf{Y})$, yaitu

$$\text{MCoVaR}_{1-\alpha|1-\beta}(X | \mathbf{Y}) = \text{VaR}_{1-\alpha}(X | \mathbf{Y} = \mathbf{VaR}_{1-\beta}(\mathbf{Y})), \quad (3.18)$$

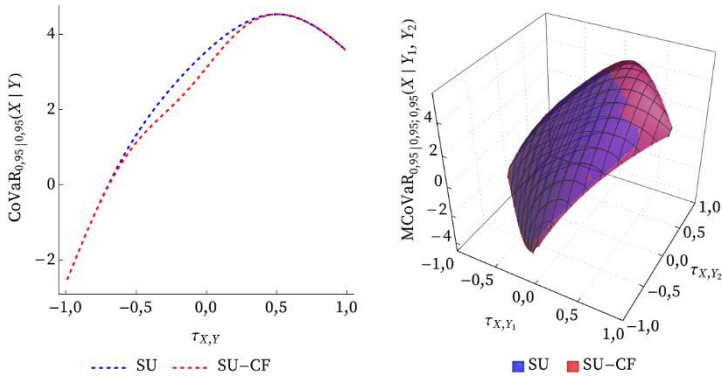
dengan $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)^\top$, $\mathbf{VaR}_{1-\beta}(\mathbf{Y}) = (\text{VaR}_{1-\beta_1}(Y_1), \dots, \text{VaR}_{1-\beta_N}(Y_N))^\top$, dan $\mathbf{1} - \boldsymbol{\beta} = (1 - \beta_1, \dots, 1 - \beta_N)^\top \in (0, 1)^d$, untuk suatu bilangan bulat positif N . Kemudian, dengan melibatkan momen-momen bersyarat orde tinggi $\mu_{X|Y}$, $\sigma_{X|Y}^2$, $\xi_{X|Y}$, $\kappa_{X|Y}$ dari $X | Y = \text{VaR}_{1-\beta}(Y)$ serta momen-momen bersyarat orde tinggi $\mu_{X|\mathbf{Y}}$, $\sigma_{X|\mathbf{Y}}^2$, $\xi_{X|\mathbf{Y}}$, $\kappa_{X|\mathbf{Y}}$ dari $X | \mathbf{Y} = \mathbf{VaR}_{1-\beta}(\mathbf{Y})$, Hakim dkk. (2022) memodifikasi CoVaR serta MCoVaR melalui ekspansi CF sebagai berikut.

$${}^{\text{CF}}\text{CoVaR}_{1-\alpha|1-\beta}(X | Y) = \mu_{X|Y} + \sqrt{\sigma_{X|Y}^2} {}^{\text{CF}}Z_{1-\alpha}(\xi_{X|Y}, \kappa_{X|Y}), \quad (3.19)$$

$${}^{\text{CF}}\text{MCoVaR}_{1-\alpha|1-\beta}(X | \mathbf{Y}) = \mu_{X|\mathbf{Y}} + \sqrt{\sigma_{X|\mathbf{Y}}^2} {}^{\text{CF}}Z_{1-\alpha}(\xi_{X|\mathbf{Y}}, \kappa_{X|\mathbf{Y}}). \quad (3.20)$$

Gambar 3.7 memperlihatkan pengaruh koefisien korelasi $\tau_{X,Y}$ Kendall dari risiko acak SU Johnson bivariat terhadap $\text{CoVaR}_{0,95|0,95}(X | Y)$ dan

modifikasinya melalui ekspansi CF. Untuk kasus trivariat, pengaruh τ_{X,Y_1} dan τ_{X,Y_2} terhadap $\text{MCoVaR}_{0,95|0,95; 0,95}(X | Y_1, Y_2)$ juga dapat diamati pada Gambar 3.7.



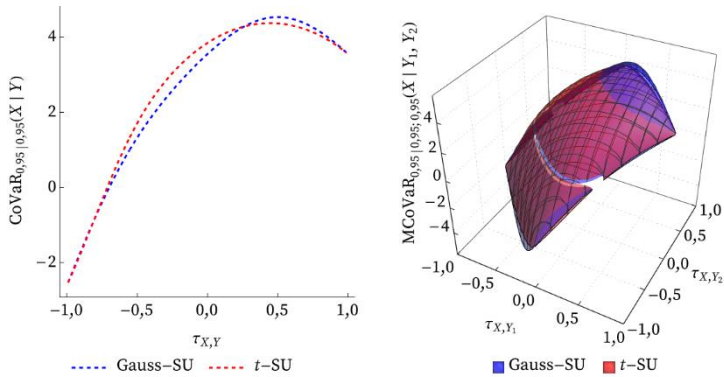
Gambar 0.10 Grafik CoVaR (MCoVaR) sebagai fungsi τ Kendall dari risiko acak SU Johnson bivariat (trivariat).

Sementara itu, dengan mengasumsikan copula bivariat $C_{U,V}(u, v) = C_{U,V}(F_X(x), F_Y(y))$ untuk X dan Y serta copula $(N + 1)$ -variatis $C_{U,V}(u, \mathbf{v}) = C_{U,V}(F_X(x), \mathbf{F}_Y(\mathbf{y}))$ untuk X dan \mathbf{Y} , Hakim dan Syuhada (2023) menghitung CoVaR dan MCoVaR berbasis copula sebagai berikut.

$$\text{CoVaR}_{1-\alpha|1-\beta}(X | Y) = \mu_{X|Y} + \sqrt{\sigma_{X|Y}^2} z_{C_{U|V}^{-1}(1-\alpha | 1-\beta)}, \quad (3.21)$$

$$\text{MCoVaR}_{1-\alpha|1-\beta}(X | \mathbf{Y}) = \mu_{X|Y} + \sqrt{\sigma_{X|Y}^2} z_{C_{U|V}^{-1}(1-\alpha | \mathbf{1}-\beta)}, \quad (3.22)$$

dengan $C_{U|V}^{-1}(\cdot | 1 - \beta)$ adalah invers fungsi distribusi bersyarat dari $U | V = 1 - \beta$, sedangkan $C_{U|V}^{-1}(\cdot | \mathbf{1} - \beta)$ adalah invers fungsi distribusi bersyarat dari $U | \mathbf{V} = \mathbf{1} - \beta$. Gambar 3.8 memperlihatkan pengaruh koefisien korelasi $\tau_{X,Y}$ Kendall dari risiko acak SU Johnson berbasis copula Gauss dan t bivariat terhadap $\text{CoVaR}_{0,95|0,95}(X | Y)$. Untuk kasus trivariat, pengaruh τ_{X,Y_1} dan τ_{X,Y_2} terhadap $\text{MCoVaR}_{0,95|0,95; 0,95}(X | Y_1, Y_2)$ juga dapat diamati pada Gambar 3.8. Selain itu, CoVaR dan MCoVaR dapat juga dirumuskan dengan basis kuantil dan ekspektil bersyarat (Ren dkk., 2022; Syuhada dkk., 2024 (a)).



Gambar 0.11 Grafik CoVaR (MCoVaR) sebagai fungsi τ Kendall dari risiko acak SU Johnson berbasis copula Gauss dan t bivariat (trivariat).

Ukuran Risiko dengan Kredibilitas

Pengembangan dengan arah lain dari ukuran risiko VaR (dan ES) dapat dilakukan dengan melibatkan **teori kredibilitas**. Untuk setiap $i = 1, 2, \dots, N$, misalkan X_i adalah risiko acak dari polis asuransi/instrumen keuangan ke- i dengan fungsi distribusi $F_i(\cdot | \theta_i)$ dan fungsi peluang $f_i(\cdot | \theta_i)$; parameter θ_i menyatakan profil atau karakteristik risiko. Menurut teori kredibilitas Bühlmann (1967), θ_i dianggap sebagai realisasi dari suatu peubah acak Θ_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Diasumsikan bahwa $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_N$ saling bebas dan berdistribusi identik. Jika diberikan θ_i , koleksi risiko acak $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$ dari X_i diasumsikan saling bebas dan berdistribusi identik.

Kemudian, misalkan $\widehat{\text{VaR}}_{1-\alpha}(X_i)$ adalah prediksi VaR dari X_i dengan mean $E(\widehat{\text{VaR}}_{1-\alpha}(X_i) | \theta_i) = \mu_{1-\alpha}^{\text{VaR}}(\theta_i)$ dan variansi $\text{Var}(\widehat{\text{VaR}}_{1-\alpha}(X_i) | \theta_i) = \frac{1}{n} v_{1-\alpha}^{\text{VaR}}(\theta_i)$. Misalkan pula $\mu_{1-\alpha}^{\text{VaR}} = E(\mu_{1-\alpha}^{\text{VaR}}(\theta_i))$, $v_{1-\alpha}^{\text{VaR}} = \frac{1}{n} E(v_{1-\alpha}^{\text{VaR}}(\theta_i))$, dan $\psi_{1-\alpha}^{\text{VaR}} = \text{Var}(\mu_{1-\alpha}^{\text{VaR}}(\theta_i))$. Pitselis (2013, 2016) serta Syuhada dan Hakim (2024) memprediksi ukuran risiko **Credible-VaR** (CreVaR) dari X_i sebagai berikut.

$$\text{Cre}\widehat{\text{VaR}}_{1-\alpha}(X_i) = Z_{1-\alpha}^{\text{VaR}} \widehat{\text{VaR}}_{1-\alpha}(X_i) + (1 - Z_{1-\alpha}^{\text{VaR}}) \mu_{1-\alpha}^{\text{VaR}}, \quad (3.23)$$

dengan $Z_{1-\alpha}^{\text{VaR}} = \frac{\psi_{1-\alpha}^{\text{VaR}}}{\psi_{1-\alpha}^{\text{VaR}} + v_{1-\alpha}^{\text{VaR}}}$ adalah **faktor kredibilitas** yang menyatakan besar keyakinan terhadap prediksi $\widehat{\text{VaR}}_{1-\alpha}(X_i)$ individu.

Sementara itu, misalkan $\text{ES}_{1-\alpha}(\theta_i) = E(X_i | X_i > \text{VaR}_{1-\alpha}(X_i), \theta_i)$ dan

$$SV_{1-\alpha}(\theta_i) = \text{Var}(X_i \mid X_i > \text{VaR}_{1-\alpha}(X_i), \theta_i), \quad (3.24)$$

yang disebut sebagai Shortfall Variance (SV). Misalkan pula $\mu_{1-\alpha}^{\text{ES}} = E(\text{ES}_{1-\alpha}(\theta_i))$, $v_{1-\alpha}^{\text{ES}} = E(SV_{1-\alpha}(\theta_i))$, dan $\psi_{1-\alpha}^{\text{ES}} = \text{Var}(\text{ES}_{1-\alpha}(\theta_i))$. Analog dengan Persamaan (3.23), Pitselis (2013, 2016) serta Syuhada dan Hakim (2024) menentukan prediksi **Credible-ES** (CreES) sebagai berikut.

$$\widehat{\text{CreES}}_{1-\alpha}(X_i) = Z_{1-\alpha}^{\text{ES}} \widehat{\text{ES}}_{1-\alpha}(X_i) + (1 - Z_{1-\alpha}^{\text{ES}}) \mu_{1-\alpha}^{\text{ES}}, \quad (3.25)$$

dengan $Z_{1-\alpha}^{\text{ES}} = \frac{\psi_{1-\alpha}^{\text{ES}}}{\psi_{1-\alpha}^{\text{ES}} + \frac{1}{|\alpha n|} v_{1-\alpha}^{\text{ES}}}$ adalah faktor kredibilitas prediksi ES, dan $\lceil \cdot \rceil$ adalah fungsi atap (*ceiling function*).

Jika faktor kredibilitas $Z_{1-\alpha}$ dekat dengan satu, maka keyakinan yang lebih tinggi diberikan kepada prediksi ukuran risiko individu dari setiap polis asuransi/instrumen keuangan i . Sebaliknya, jika $Z_{1-\alpha}$ dekat dengan nol, maka keyakinan yang lebih tinggi diberikan kepada mean $\mu_{1-\alpha}$ dari prediksi ukuran risiko untuk semua polis asuransi/instrumen keuangan.

Aplikasi Ukuran Risiko

Aplikasi VaR/ES di bidang keuangan dan asuransi telah berkembang pesat. Ukuran risiko tersebut menjadi alat untuk mengambil keputusan dan penentuan **cadangan modal/alokasi risiko** (Tasche, 2008; Dhaene dkk., 2012; Balog, dkk., 2017) serta mendeteksi **pengurangan risiko portofolio** (*portfolio risk reduction*) (Bredin dkk., 2017; Conlon dan McGee, 2020; Conlon dkk., 2020).

Pandang risiko/kerugian agregat

$$S_N = w_1 X_1 + w_2 X_2 + \dots + w_N X_N = \sum_{i=1}^N w_i X_i, \quad (3.26)$$

untuk suatu risiko-risiko/kerugian-kerugian acak X_1, X_2, \dots, X_N dan bobot-bobot yang bersesuaian $w_1, w_2, \dots, w_N \geq 0$, dengan N menyatakan banyak/frekuensi risiko; sering kali dipilih bobot-bobot yang memenuhi $\sum_{i=1}^N w_i = 1$. Dalam hal ini, X_1, X_2, \dots, X_N dapat diasumsikan saling bebas atau saling bergantung, sedangkan N dapat diasumsikan sebagai suatu konstanta atau suatu peubah acak. Jika N adalah peubah acak, maka X_i dan N dapat diasumsikan saling bebas atau saling bergantung.

Selanjutnya, misalkan $\varrho(X_i)$ menyatakan ukuran risiko dari risiko individu X_i , dan $A_\varrho(X_i)$ menyatakan **kontribusi/alokasi risiko** individu ke- i terhadap ukuran risiko agregat $\varrho(S_N)$. Dengan demikian, ukuran risiko agregat $\varrho(S_N)$ dapat dinyatakan sebagai

$$\varrho(S_N) = \sum_{i=1}^N a_i \varrho(X_i) = \sum_{i=1}^N A_\varrho(X_i), \quad (3.27)$$

dengan a_i adalah proporsi dari alokasi risiko individu ke- i . Alokasi risiko $A_\varrho(X_i) = p_i \varrho(X_i)$ dapat ditentukan secara proporsional dan non-proporsional. Secara proporsional, $A_\varrho(X_i)$ dapat dinyatakan sebagai

$$A_\varrho(X_i) = \frac{\varrho(S_N)}{\sum_{i=1}^N \varrho(X_i)} \varrho(X_i). \quad (3.28)$$

Dalam hal ini, $\varrho(X_i)$ dapat diasumsikan berupa

- a. $\varrho(X_i) = \text{VaR}_{1-\alpha}(X_i)$, yang dikenal sebagai **prinsip alokasi haircut** (Dhaene dkk., 2012; Addini dan Syuhada, 2020),
- b. $\varrho(X_i) = \text{Cov}(X_i, S_N)$, yang dikenal sebagai **prinsip alokasi beta atau kovariansi** (Dhaene dkk., 2012; Balog dkk., 2017).

Sementara itu, secara non-proporsional, alokasi risiko $A_\varrho(X_i)$ dari risiko individu ke- i dapat ditentukan sebagai turunan parsial dari ukuran risiko agregat $\varrho(S_N) = \varrho(\sum_{i=1}^N w_i X_i)$ terhadap bobot w_i , yaitu

$$A_\varrho(X_i) = \left. \frac{\partial \varrho(\sum_{i=1}^N w_i X_i)}{\partial w_i} \right|_{\sum_{i=1}^N w_i = 1}, \quad (3.29)$$

dengan asumsi bahwa ukuran risiko ϱ memenuhi Aksioma PH (*positive homogeneity*). Pendekatan ini dikenal sebagai **prinsip alokasi marginal atau Euler** (Tasche, 2008; Balog dkk., 2017). Secara khusus, jika ukuran risiko yang digunakan adalah VaR atau ES, maka alokasi risiko tersebut dirumuskan sebagai berikut (Tasche, 2008; Bargès dkk., 2009; Addini dan Syuhada, 2020).

$$A_{\text{VaR}}(X_i) = E(X_i \mid S_N = \text{VaR}_{1-\alpha}(S_N)), \quad (3.30)$$

$$A_{\text{ES}}(X_i) = E(X_i \mid S_N > \text{VaR}_{1-\alpha}(S_N)). \quad (3.31)$$

Perhatikan kembali $S_N = \sum_{i=1}^N w_i X_i$ dengan bobot-bobot $w_1, \dots, w_N \geq 0$ yang memenuhi $\sum_{i=1}^N w_i = 1$; artinya, S_N merupakan **risiko portofolio**. Kemudian, misalkan risiko individu lain, X_{N+1} , ditambahkan sehingga diperoleh risiko portofolio baru, $S_{N+1}^* = \sum_{i=1}^{N+1} w_i^* X_i$, dengan bobot-bobot baru $w_1^*, \dots, w_N^*, w_{N+1}^* \geq 0$ yang memenuhi $\sum_{i=1}^{N+1} w_i^* = 1$. Jika kedua risiko portofolio tersebut diukur menggunakan ukuran risiko ρ , maka **ukuran risiko relatif**

$$RR_{\rho}(S_N) = \frac{\rho(S_{N+1}^*)}{\rho(S_N)} \quad (3.32)$$

dapat digunakan untuk mengukur perubahan nilai risiko portofolio S_N akibat penambahan risiko individu X_{N+1} . Jika $RR_{\rho}(S_N) < 1$, maka X_{N+1} dapat mengurangi risiko portofolio S_N , sehingga **pengurangan risiko portofolio** (*portfolio risk reduction*) tercapai (Bredin dkk., 2017; Conlon dan McGee, 2020; Conlon dkk., 2020; Syuhada dkk., 2022a, 2022c).

4 PREDIKSI STOKASTIK UNTUK RISIKO KEUANGAN

Risiko Pasar Mata Uang Kripto dan Risiko Pasar Energi

Mata uang kripto (MUK, *cryptocurrency*), yang diperkenalkan oleh Nakamoto (2008), telah menjadi salah satu instrumen alternatif dalam pembayaran atau transaksi keuangan. MUK memiliki daya tarik yang besar dari para investor karena MUK memiliki potensi keuntungan yang sangat besar (*high positive return*). Namun, tentu saja risiko yang mungkin terjadi juga besar. Salah satu MUK yang menjanjikan dan besar/dominan (*prominent and major*) adalah **Bitcoin** (BTC) yang sering disebut sebagai emas digital (*digital gold*) karena kemiripan sifatnya dengan emas (GLD) (Popper, 2015).

Sifat yang melekat pada imbal hasil (*return*) dari Bitcoin, atau MUK secara umum, adalah **volatilitas asimetris terbalik** (*inverse asymmetric volatility*). Hal ini berbeda dengan volatilitas imbal hasil aset lain.

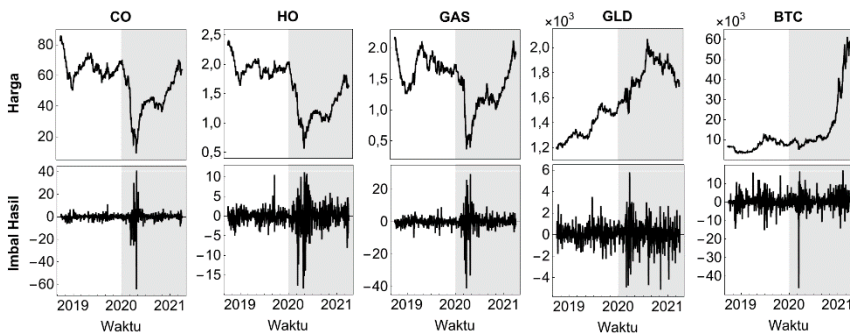
Seperti halnya emas, Bitcoin memiliki sifat/peran sebagai **pelindung/penjaga kestabilan aset** (*safe haven*) pada portofolio. Hal ini menurut temuan bahwa imbal hasil Bitcoin berkorelasi negatif atau tidak berkorelasi dengan imbal hasil dari beberapa indeks saham (Bouri dkk., 2020a, 2020b; Mariana dkk., 2021), termasuk indeks saham sektor energi (Bouri dkk., 2017). Menurut Conlon dan McGee (2020) serta Conlon dkk. (2020), peran *safe haven* dapat juga diselidiki dengan menghitung proporsi pengurangan risiko (*risk reduction*) melalui Persamaan (3.32).

Melalui pendekatan di atas, Syuhada dkk. (2022c) membangun **model portofolio** “komoditas energi + emas” dan “komoditas energi + Bitcoin” serta menyelidiki pengurangan risiko yang terjadi akibat penambahan emas/Bitcoin. Hal ini bertujuan untuk membandingkan peran *safe haven* dari emas dan Bitcoin untuk komoditas energi. Secara khusus, Syuhada dkk. (2022c) mempertimbangkan minyak mentah (*crude oil*, CO), minyak pemanas (*heating oil*, HO), dan bensin (*gasoline*, GAS). Portofolio yang dibangun untuk imbal hasil $R_{CO,t}$, $R_{HO,t}$, $R_{GAS,t}$ dari tiga komoditas energi tersebut adalah $R_{E,t} = \frac{1}{3}R_{CO,t} + \frac{1}{3}R_{HO,t} + \frac{1}{3}R_{GAS,t}$. Dengan menambahkan imbal hasil emas, $R_{GLD,t}$, atau imbal hasil Bitcoin, $R_{BTC,t}$, diperoleh portofolio baru,

$$S_t = (1 - w)R_{E,t} + wR_{GLD/BTC,t}. \quad (4.1)$$

Selanjutnya, ukuran risiko dikenakan pada portofolio imbal hasil komoditas energi dan emas/Bitcoin, $\varrho(S_t)$, dan dibandingkan dengan ukuran risiko yang hanya dikenakan pada portofolio imbal hasil komoditas energi, $\varrho(R_{E,t})$. Rasio dari dua ukuran risiko ini, $RR_\varrho = \frac{\varrho(S_t)}{\varrho(R_{E,t})}$, dijadikan sebagai penentu ada tidaknya pengurangan risiko atau ada tidaknya peran *safe haven* dari emas/Bitcoin.

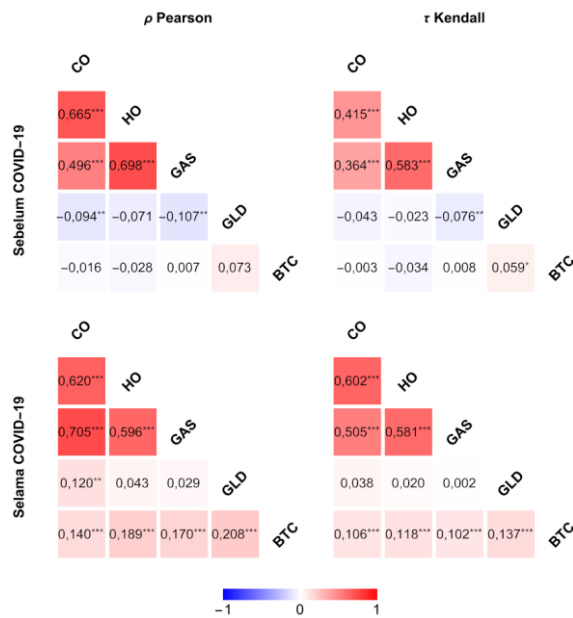
Untuk mencapai tujuan tersebut, Syuhada dkk. (2022 (c)) menggunakan data harga harian, $\{p_{i,t}\}$, dari setiap instrumen keuangan i ($i = \text{CO, HO, GAS, GLD, BTC}$) pada periode 29 September 2018 hingga 31 Maret 2021 dan menentukan data imbal hasilnya, $\{r_{i,t}\}$, dengan $r_{i,t} = 100 \ln\left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}}\right)$. Terlihat pada Gambar 4.1 bahwa harga komoditas energi mengalami penurunan yang cukup drastis pada awal periode COVID-19. Hal ini mendasari pentingnya penentuan *safe haven* untuk komoditas energi tersebut, khususnya selama COVID-19.



Gambar 0.12 Harga komoditas energi, emas, dan Bitcoin harian beserta imbal hasilnya. Catatan: Harga CO, HO/GAS, emas, dan Bitcoin berturut-turut dinyatakan dalam USD per barel, USD per galon, USD per troy ons, dan USD. Daerah berwarna abu-abu menunjukkan periode selama COVID-19 (31 Desember 2019–31 Maret 2021).

Syuhada dkk. (2022c) mempertimbangkan model imbal hasil stokastik $R_{i,t} = \mu_{i,t} + \sqrt{\sigma_{i,t}^2} \varepsilon_{i,t}$ untuk setiap instrumen/aset i dengan komponen mean bersyarat $\mu_{i,t}$ (AR orde 1) dan volatilitas asimetris $\sigma_{i,t}^2$ (GJR-GARCH orde (1, 1)) yang berturut-turut diberikan pada Persamaan (2.8) dan (2.10) serta inovasi $\varepsilon_{i,t}$. Kebergantungan (*dependence*) antara model-model imbal hasil individu merupakan asumsi penting yang digunakan dalam membangun model

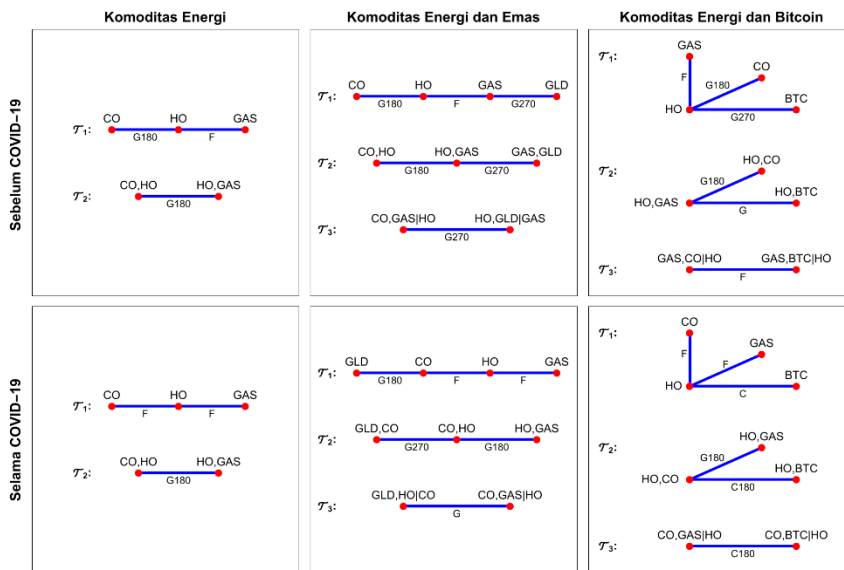
portofolio, $R_{E,t}$ maupun S_t . Kebergantungan ini dapat diukur melalui suatu ukuran kebergantungan (*dependence measure*), seperti koefisien korelasi ρ Pearson yang merupakan ukuran **kebergantungan linier** antara dua imbal hasil. Sementara itu, ukuran kebergantungan lain yang bersifat invarian terhadap ketaklinieran adalah τ Kendall. Secara empiris, ρ Pearson dan τ Kendall dari setiap pasang imbal hasil diberikan pada Gambar 4.2. Secara teoretis, perhitungan ukuran kebergantungan tersebut melibatkan dua distribusi statistik marginal dari dua imbal hasil yang sering kali tidak sama maupun identik. Akibatnya, distribusi bersama (*joint distribution*) dari dua imbal hasil tersebut sulit ditentukan secara eksplisit. Dengan demikian, diperlukan alat statistik (*statistical tool*) lain yang dapat memberikan formula eksplisit dari distribusi bersama. Alat statistik tersebut adalah **copula (vine)**.



Gambar 0.13 Matriks korelasi ρ Pearson dan τ Kendall empiris dari imbal hasil komoditas energi, emas, dan Bitcoin. Catatan: Tanda *, **, *** berturut-turut menunjukkan bahwa koefisien korelasi bernilai tidak sama dengan nol secara signifikan pada tingkat signifikansi 10%, 5%, 1%.

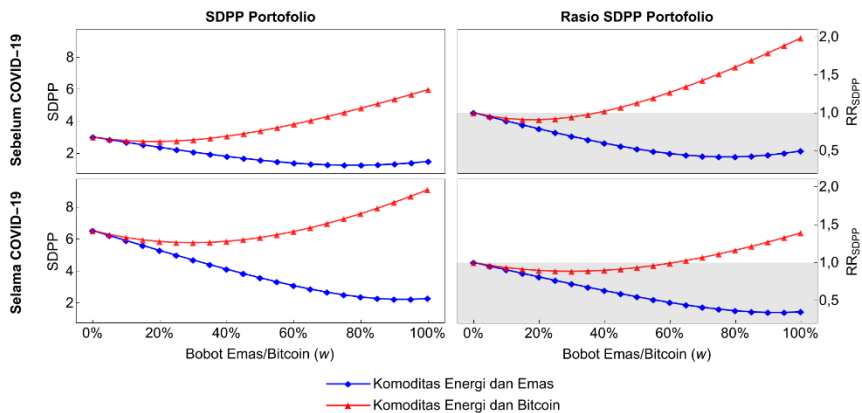
Syuhada dkk. (2022 (c)) menggunakan copula vine untuk mengidentifikasi kebergantungan antara tiga komoditas energi (CO, HO, dan GAS). Copula vine juga digunakan untuk menentukan kebergantungan komoditas energi dengan emas/Bitcoin. tersebut dibangun dari copula-copula Archimedes bivariat terbaik dan direpresentasikan melalui graf-graf pohon (*tree graphs*)

berdasarkan Aas dkk. (2009) serta Syuhada dan Hakim (2020), sebagaimana disajikan pada Gambar 4.3.



Gambar 0.14 Copula vine yang merepresentasikan ketergantungan antara imbal hasil komoditas energi, emas, dan Bitcoin. Catatan: Pada setiap sisi graf pohon, C, G, dan F berturut-turut menyatakan copula Clayton, Gumbel, dan Frank bivariat terbaik, sedangkan C90/180/270 dan G90/180/270 berturut-turut menyatakan copula Clayton dan Gumbel bivariat yang dirotasi searah jarum jam sebesar 90/180/270 derajat.

Selanjutnya, model stokastik berbasis copula vine digunakan untuk menghitung prediksi ukuran risiko, $SDPP_{0,99}$, dari portofolio komoditas energi setelah dan sebelum penambahan emas/Bitcoin beserta rasionya, $RR_{SDPP_{0,99}}$. Gambar 4.4 memperlihatkan bahwa penambahan emas ke portofolio komoditas energi menghasilkan $RR_{SDPP_{0,99}} < 1$ yang turun seiring bertambah besarnya bobot emas. Sementara itu, penambahan Bitcoin mengakibatkan bahwa $RR_{SDPP_{0,99}}$ mula-mula turun di bawah satu ketika bobot Bitcoin kecil, tetapi kemudian naik di atas satu seiring meningkatnya bobot Bitcoin. Hal ini mengindikasikan bahwa emas merupakan *safe haven* yang konsisten untuk portofolio komoditas energi, sedangkan peran *safe haven* dari Bitcoin tidak konsisten. Artinya, Bitcoin bukan merupakan emas digital atau emas baru (*new gold*), Copula vine sebagaimana diungkapkan oleh Klein dkk. (2018). Hasil ini sejalan dengan temuan Dutta dkk. (2020) yang menjelaskan bahwa imbal hasil Bitcoin berkorelasi positif dengan imbal hasil minyak mentah, khususnya selama COVID-19.



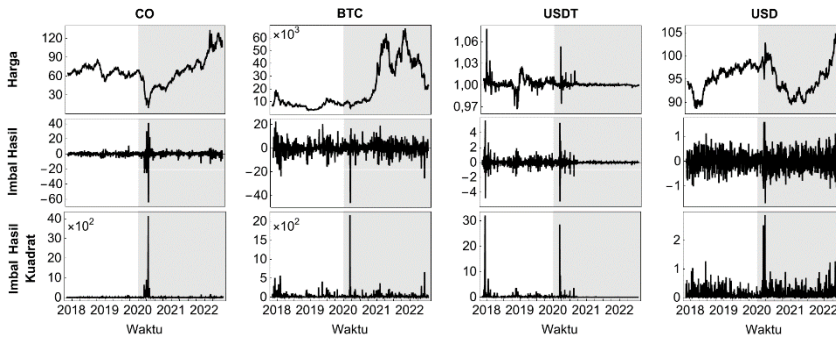
Gambar 0.15 Prediksi ukuran risiko $SDPP_{0,99}$ dari portofolio komoditas energi dan emas/Bitcoin serta rasio $SDPP_{0,99}$ setelah dan sebelum penambahan emas/Bitcoin. Catatan: Daerah berwarna abu-abu menunjukkan bahwa emas/Bitcoin dapat mengurangi risiko portofolio komoditas energi.

Karena Bitcoin gagal berperan secara konsisten sebagai *safe haven* untuk komoditas energi, Bitcoin sendiri perlu dijaga/dilindungi oleh aset lain yang lebih stabil, yaitu **MUK stabil** (*stablecoin*). MUK stabil merupakan MUK yang nilainya dipatok ke aset yang relatif stabil, seperti mata uang (yaitu **dolar Amerika Serikat (USD)** atau Euro) atau logam mulia (yaitu emas). Salah satu MUK stabil terbesar adalah Tether (USDT) yang nilainya dijaga di sekitar 1 USD. Liu (2019) menunjukkan bahwa Tether memiliki perilaku yang sangat berbeda dengan MUK tradisional/non-stabil dan justru serupa dengan mata uang. Dengan demikian, Tether dapat menjadi *safe haven* alternatif selain USD.

Syuhada dkk. (2022a) kemudian mempertimbangkan Tether sebagai kandidat *safe haven* untuk portofolio komoditas minyak mentah (CO) dan Bitcoin (BTC). Mereka juga menyelidiki perbandingannya terhadap indeks dolar AS, yang merupakan mean berbobot dari nilai-nilai tukar USD terhadap beberapa mata uang terbesar di dunia, yaitu Euro, yen, pound sterling, dolar Kanada, krona Swedia, dan franc Swiss.

Untuk mencapai tujuan tersebut, Syuhada dkk. (2022a) menggunakan data harga harian, $\{p_{i,t}\}$, dari setiap instrumen keuangan i (CO, BTC, USDT, USD) pada periode 9 November 2017 hingga 22 Juli 2022 dan menentukan data imbal hasilnya, $\{r_{i,t}\}$. Selain data harga dan imbal hasil, Gambar 4.5 memperlihatkan grafik imbal hasil kuadrat yang dapat dipandang sebagai volatilitas empiris. Kemudian, selain data imbal hasil, Gambar 4.6 menampilkan koefisien

korelasi antara imbal hasil kuadrat dari empat instrumen di atas. Terlihat bahwa imbal hasil kuadrat dari Bitcoin dan Tether berkorelasi positif, dan korelasinya semakin kuat selama COVID-19. Artinya, volatilitas Bitcoin yang tinggi cenderung diikuti oleh volatilitas Tether yang tinggi pula. Hal ini bertolak belakang dengan tujuan penciptaan Tether sebagai MUK stabil.



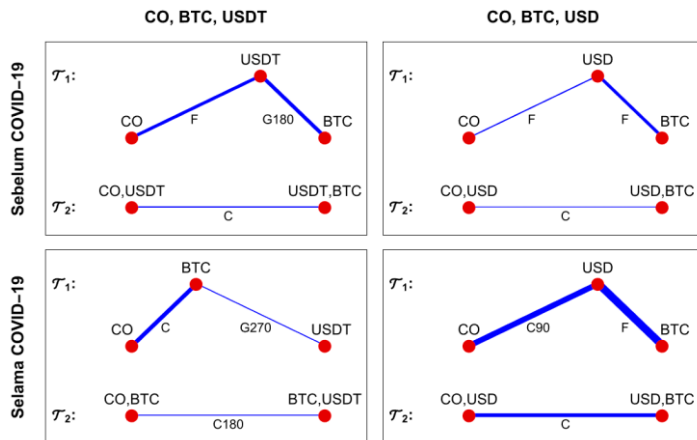
Gambar 0.16 Harga minyak mentah, Bitcoin, Tether, dan indeks USD harian beserta imbal hasil (kuadrat)-nya. Catatan: Harga minyak mentah dan Bitcoin/Tether/indeks dolar AS berturut-turut dinyatakan dalam USD per barel dan USD. Daerah berwarna abu-abu menunjukkan periode selama COVID-19 (31 Desember 2019–22 Juli 2022).



Gambar 0.17 Matriks korelasi ρ Pearson empiris dari imbal hasil (kuadrat) minyak mentah, Bitcoin, Tether, dan indeks USD. Catatan: Tanda *, **, *** berturut-turut menunjukkan bahwa koefisien korelasi bernilai tidak sama dengan nol secara signifikan pada tingkat signifikansi 10%, 5%, 1%.

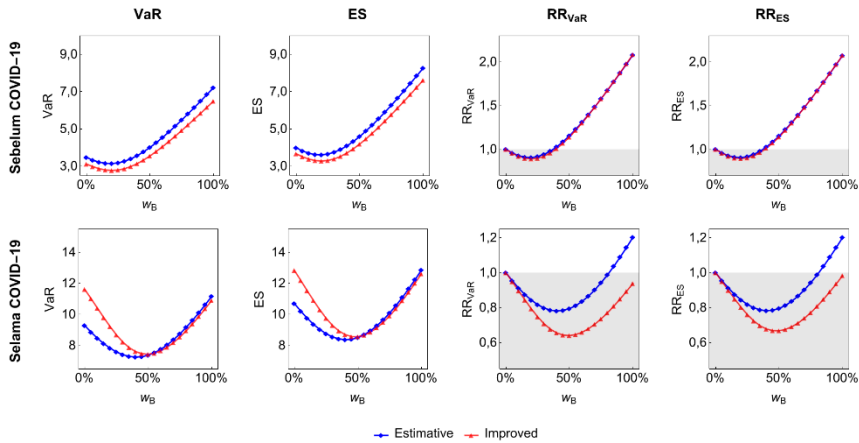
Dengan model imbal hasil marginal AR(1)-GJR-GARCH(1, 1), Syuhada dkk. (2022a) mengasumsikan kembali model kebergantungan berbasis copula vine yang direpresentasikan melalui graf-graf pohon. Copula vine yang

dibangun dari copula-copula Archimedes bivariat terbaik diberikan pada Gambar 4.7. Kemudian, model tersebut digunakan untuk menghitung prediksi ukuran risiko (*estimative-* dan *improved-*) $\text{VaR}_{0,99}$ dan $\text{ES}_{0,99}$ dari portofolio minyak mentah dan Bitcoin setelah dan sebelum ditambah dengan Tether/indeks USD beserta rasionya ($\text{RR}_{\text{VaR}_{0,99}}$ dan $\text{RR}_{\text{ES}_{0,99}}$). Gambar 4.8 memperlihatkan kembali bahwa Bitcoin tidak berperan sebagai *safe haven* yang konsisten untuk minyak mentah, sehingga diperlukan penambahan Tether/indeks USD. Pada Gambar 4.9 dan 4.10, Tether maupun indeks USD dapat mereduksi risiko portofolio minyak mentah dan Bitcoin dengan sebarang bobot. Artinya, kedua instrumen ini merupakan *safe haven* yang konsisten untuk portofolio tersebut. Namun, indeks USD dapat menjadi pilihan yang lebih sesuai daripada Tether karena Tether merupakan MUK yang volatilitasnya tidak sestabil namanya, *stablecoin*.

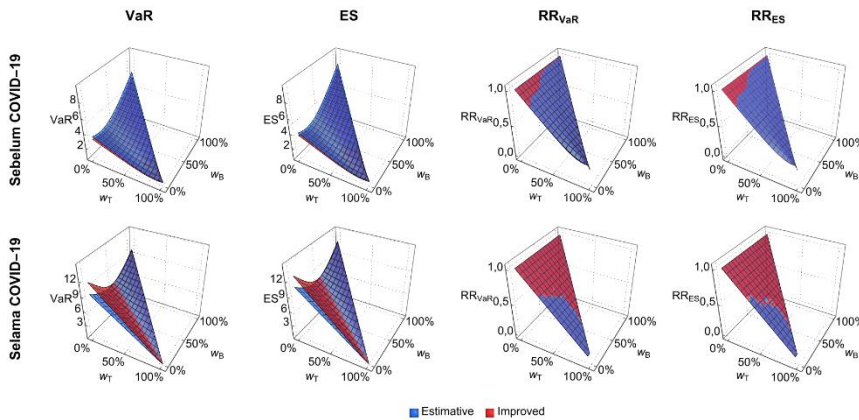


Gambar 0.18 Copula vine yang merepresentasikan kebergantungan antara imbal hasil minyak mentah, Bitcoin, dan Tether/indeks USD. Catatan: Pada setiap sisi graf pohon, C, G, dan F berturut-turut menyatakan copula Clayton, Gumbel, dan Frank bivariat terbaik, sedangkan C90/180/270 dan G90/180/270 berturut-turut menyatakan copula Clayton dan Gumbel bivariat yang dirotasi searah jarum jam sebesar 90/180/270 derajat.

Berdasarkan hasil di atas, investor dan pengambil kebijakan di pasar energi dapat menentukan strategi investasi dan kebijakan yang efektif untuk melindungi portofolio dan kestabilan pasar dengan menggunakan aset yang sesuai. Di antara emas dan Bitcoin, mereka dapat memilih emas yang mampu mereduksi risiko pasar energi secara konsisten.

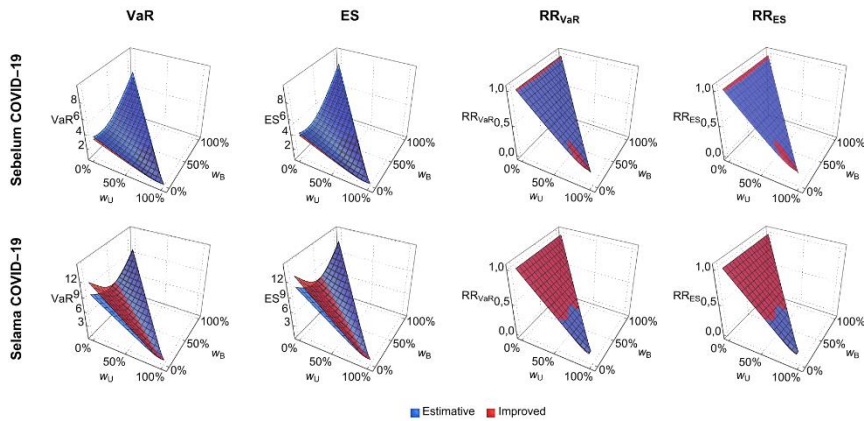


Gambar 0.19 Prediksi ukuran risiko $VaR_{0,99}$ dan $ES_{0,99}$ dari portofolio minyak mentah (dengan bobot $1 - w_B$) dan Bitcoin (dengan bobot w_B) serta rasio $VaR_{0,99}$ dan $ES_{0,99}$ setelah dan sebelum penambahan Bitcoin. Catatan: Daerah berwarna abu-abu menunjukkan bahwa Bitcoin dapat mengurangi risiko minyak mentah.



Gambar 0.20 Prediksi ukuran risiko $VaR_{0,99}$ dan $ES_{0,99}$ dari portofolio minyak mentah (dengan bobot $1 - w_B - w_T$), Bitcoin (dengan bobot w_B), dan Tether (dengan bobot w_T) serta rasio $VaR_{0,99}$ dan $ES_{0,99}$ setelah dan sebelum penambahan Tether, dengan $w_B + w_T \leq 100\%$.

Namun, jika Bitcoin dijadikan sebagai pilihan, maka mereka memerlukan aset lain yang lebih stabil, seperti Tether dan indeks USD. Mereka dapat memilih Tether maupun indeks USD karena keduanya dapat berperan secara konsisten sebagai pelindung pasar energi. Namun, untuk mendapatkan kestabilan pasar yang lebih efektif, indeks USD merupakan pilihan yang lebih sesuai dibandingkan dengan Tether.



Gambar 0.21 Prediksi ukuran risiko $VaR_{0,99}$ dan $ES_{0,99}$ dari portofolio minyak mentah (dengan bobot $1 - w_B - w_U$), Bitcoin (dengan bobot w_B), dan indeks USD (dengan bobot w_U) serta rasio $VaR_{0,99}$ dan $ES_{0,99}$ setelah dan sebelum penambahan indeks USD, dengan $w_B + w_U \leq 100\%$.

Hal ini disebabkan karena indeks USD merupakan kombinasi/portofolio dari nilai-nilai tukar USD terhadap beberapa mata uang negara lain yang dijaga agar tetap stabil oleh bank sentral masing-masing negara. Sementara itu, meskipun Tether merupakan suatu MUK stabil yang nilainya dipatok ke USD, volatilitas Tether tidak sestabil namanya (MUK stabil, *stablecoin*) akibat korelasinya yang positif dan cukup kuat dengan volatilitas Bitcoin.

5 PREDIKSI STOKASTIK UNTUK RISIKO ASURANSI

Risiko Pembayaran Klaim Asuransi

Asuransi adalah pertanggunggaan atau perjanjian atas perpindahan risiko dari nasabah (pemegang polis, *insured*) ke pejamin risiko (perusahaan asuransi, *insurer*). Nasabah membayar sejumlah uang (**premi**) kepada perusahaan asuransi yang dijadikan sebagai dasar nilai pembayaran (*benefit*) kepada nasabah. Jika nasabah mengajukan **klaim** karena terjadi sesuatu yang menimpa nasabah atau barang milik nasabah, maka perusahaan asuransi membayar sejumlah uang asuransi kepada nasabah. **Pembayaran klaim** dilakukan berdasarkan banyak pengajuan klaim yang dilakukan.

Model pembayaran klaim secara agregat adalah

$$S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N, \quad (5.1)$$

dengan N adalah risiko acak yang menyatakan banyak/frekuensi klaim (*claim frequency*) yang diajukan/disetujui, sedangkan X_i adalah nilai/besar klaim (*claim size*) dari pengajuan/persetujuan klaim ke- i . Distribusi statistik yang melekat pada model agregat ini adalah “distribusi N -distribusi X ” atau “**distribusi primer-sekunder**” (Tse, 2009; Klugman dkk., 2019). Umumnya, distribusi Poisson diasumsikan sebagai distribusi N , sedangkan distribusi X adalah distribusi eksponensial atau Pareto. Sering kali, distribusi N dan X saling bebas.

Model pembayaran klaim agregat pada Persamaan (5.1) dapat dituliskan sebagai $S_{N,\bar{X}} = N\bar{X}$, dengan \bar{X} adalah mean besar pembayaran klaim, yang disebut sebagai severitas klaim (*claim severity*). Hernández-Bastida dkk. (2011) mengasumsikan bahwa N dan \bar{X} berturut-turut memiliki **distribusi Poisson-Lindley** dan eksponensial yang saling bebas. Distribusi Poisson-Lindley mampu menangkap fenomena **overdispersi** banyak klaim, yakni kondisi ketika variansi banyak klaim lebih besar daripada meannya. Kemudian, Cha (2019) mempertimbangkan **proses stokastik Poisson-Lindley** $\{N_t\}$, dengan N_t adalah banyak klaim pada selang waktu $[0, t]$, sehingga diperoleh **proses stokastik Poisson-Lindley majemuk** $\{S_{N_t,\bar{X}}\}$ untuk pembayaran klaim agregat. Namun, N_t dan \bar{X} diasumsikan saling bebas. Sementara itu, Bolancé dan

Vernic (2020) mengasumsikan bahwa N dan \tilde{X} pada model $S_{N,\tilde{X}}$ saling bergantung dengan model kebergantungan Sarmanov.

Dengan mengadopsi model kebergantungan Sarmanov, Syuhada dkk. (2024b) memperluas proses Poisson–Lindley majemuk menjadi $\{S_{N_t,\tilde{X};\omega}\}$,

$$S_{N_t,\tilde{X};\omega} = N_t\tilde{X}, \tag{5.2}$$

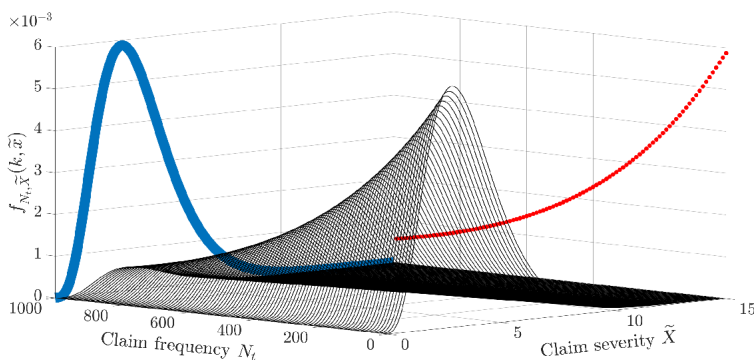
untuk suatu parameter kebergantungan $\omega \in \mathbb{R}$. Vektor acak $(N_t, \tilde{X})_\omega$ memiliki distribusi bersama Sarmanov dengan fungsi peluang bersama

$$f_{N_t,\tilde{X}}(k, \tilde{x}) = \begin{cases} f_{N_t}(0), & k = \tilde{x} = 0, \\ f_{N_t}(k)f_{\tilde{X}}(\tilde{x})\left(1 + \omega\varphi_{N_t}(k)\varphi_{\tilde{X}}(\tilde{x})\right), & k \geq 1, \tilde{x} > 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Fungsi $f_{N_t}(k)$ adalah fungsi peluang marginal dari proses Poisson–Lindley non-homogen untuk banyak klaim dengan parameter $\theta > 0$ dan fungsi intensitas $\lambda_t \geq 0$, yaitu

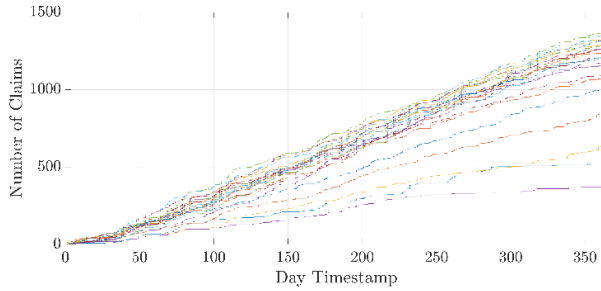
$$f_{N_t}(k) = \frac{\theta^2}{\theta + 1} \left[\frac{\theta + \Lambda_t + k + 1}{(\theta + \Lambda_t)^{k+2}} \right] \Lambda_t^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{5.4}$$

dengan $\Lambda_t = \int_0^t \lambda_u du$ adalah fungsi intensitas kumulatif. Fungsi $f_{\tilde{X}}(\tilde{x})$ adalah fungsi peluang marginal dari model severitas klaim, \tilde{X} . Fungsi $\varphi_{N_t}(k)$ dan $\varphi_{\tilde{X}}(\tilde{x})$ berturut-turut adalah fungsi kernel banyak klaim dan severitas klaim yang memenuhi kondisi $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{N_t}(k)f_{N_t}(k) = 0$ dan $\int_0^{\infty} \varphi_{\tilde{X}}(\tilde{x})f_{\tilde{X}}(\tilde{x}) d\tilde{x} = 0$. Grafik fungsi peluang bersama $f_{N_t,\tilde{X}}(k, \tilde{x})$ serta marginalnya diilustrasikan pada Gambar 5.1.



Gambar 0.22 Grafik fungsi peluang bersama dan marginal dari banyak klaim (*claim frequency*, bagian diskret) dan severitas klaim (*claim severity*, bagian kontinu).

Sebagai ilustrasi, Syuhada dkk. (2024 (b)) menerapkan model di atas untuk data klaim asuransi dari suatu negara pada tahun 1990 hingga 2014. Gambar 5.2 memperlihatkan bahwa akumulasi banyak klaim dapat didekati dengan fungsi intensitas kumulatif Λ_t yang cenderung linier, sehingga diperlukan proses Poisson–Lindley dengan fungsi intensitas konstan, $\lambda_t = \lambda$. Melalui proses stokastik ini, data banyak klaim dapat dimodelkan dengan lebih baik jika dibandingkan dengan proses Poisson. Hal ini dapat diamati berdasarkan kecocokan fungsi peluang dan fungsi distribusinya terhadap data banyak klaim tersebut pada Gambar 5.3. Sementara itu, dibandingkan dengan distribusi-distribusi statistik kontinu lain, distribusi gama dan Gauss invers paling cocok untuk memodelkan data severitas klaim, sebagaimana diilustrasikan pada Gambar 5.4. Selanjutnya, dengan mengombinasikan proses Poisson–Lindley dan distribusi gama/Gauss invers, kecocokan fungsi peluang bersama Sarmanov terhadap data banyak klaim dan severitas klaim secara simultan diberikan pada Gambar 5.5.

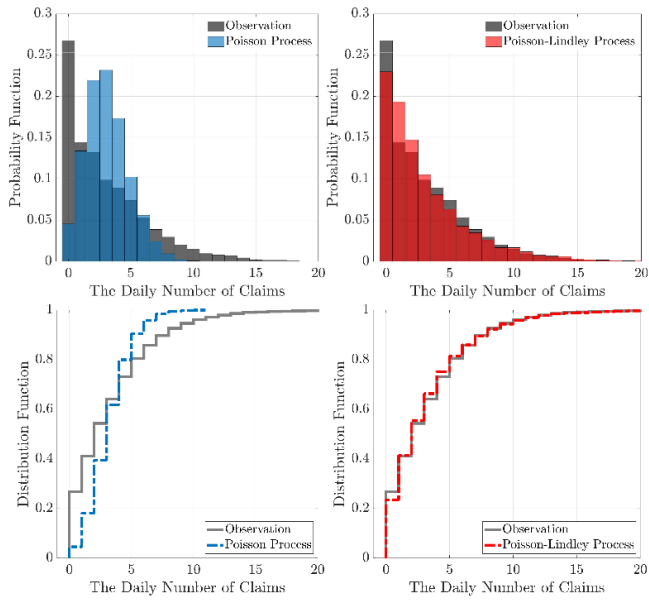


Gambar 0.23 Data akumulasi banyak klaim (*number of claims*).

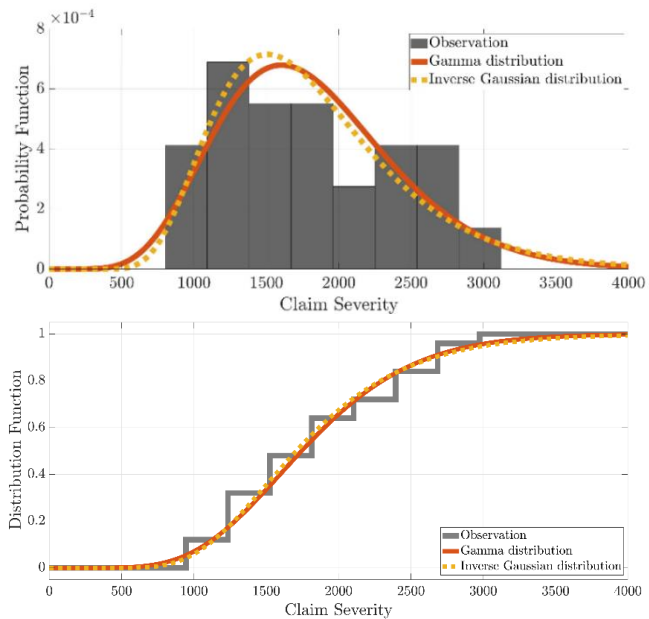
Selanjutnya, Syuhada dkk. (2024b) menentukan mean dan variansi dari model Poisson–Lindley majemuk Sarmanov $S_{N_t, \bar{X}; \omega}$ yang digunakan untuk menghitung ukuran risikonya, SDPP, yaitu

$$\text{SDPP}_a(S_{N_t, \bar{X}; \omega}) = E(S_{N_t, \bar{X}; \omega}) + z_a \sqrt{\text{Var}(S_{N_t, \bar{X}; \omega})}, \quad (5.5)$$

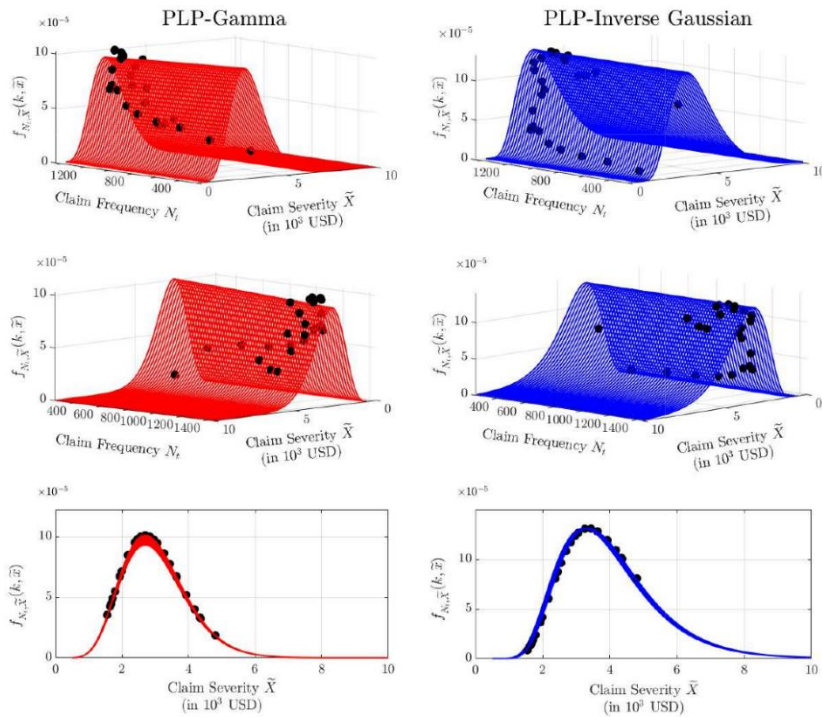
dengan $z_a = \sup \left\{ z > 0: F_{S_{N_t, \bar{X}; \omega}} \left[E(S_{N_t, \bar{X}; \omega}) + z \sqrt{\text{Var}(S_{N_t, \bar{X}; \omega})} \right] \leq a \right\}$ untuk suatu $a \in (0, 1)$. Dengan mengadopsi suatu spektrum risiko $\vartheta(\cdot)$ (Acerbi, 2002; Cotter dan Dowd, 2006), Syuhada dkk. (2024b) mengusulkan ukuran risiko spektral SDPP (SSDPP) yang dirumuskan sebagai berikut. $\text{SSDPP}_\vartheta(S_{N_t, \bar{X}; \omega}) = E(S_{N_t, \bar{X}; \omega}) + \left(\int_0^1 z_a \vartheta(a) da \right) \sqrt{\text{Var}(S_{N_t, \bar{X}; \omega})}$.



Gambar 0.24 Kecocokan proses Poisson dan Poisson–Lindley (*Poisson and Poisson–Lindley processes*) untuk data banyak klaim (*number of claims*).



Gambar 0.25 Kecocokan distribusi gama dan Gauss invers (*gamma and inverse Gaussian distributions*) untuk data severitas klaim (*claim severity*).



Gambar 0.26 Kecocokan distribusi bersama Sarmanov dari proses Poisson–Lindley (*Poisson–Lindley process, PLP*) untuk data banyak klaim (*claim frequency*) serta distribusi gama dan Gauss invers (*gamma and inverse Gaussian distributions*) untuk data severitas klaim (*claim severity*).

Risiko pada Kontrak Asuransi–Reasuransi

Perusahaan asuransi (*insurer*) dapat melakukan kegiatan berasuransi (yang disebut sebagai **reasuransi**) kepada perusahaan asuransi lain (yang disebut sebagai perusahaan reasuransi, *reinsurer*). Tindakan perusahaan asuransi untuk berasuransi dilakukan sebagai jaminan risiko jika perusahaan asuransi kesulitan (gagal) membayar klaim kepada nasabah.

Misalkan X adalah (total) kerugian awal yang dialihkan dari nasabah atau pemegang polis ke perusahaan asuransi. Dengan adanya kontrak reasuransi, misalkan $X_I = L_I(X)$ adalah nilai kerugian yang ditanggung oleh perusahaan asuransi (*retained loss*), untuk suatu fungsi $L_I: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Sementara itu, kerugian sebesar $X_R = L_R(X)$ dibagikan ke perusahaan reasuransi (*ceded loss*), untuk suatu fungsi non-negatif $L_R: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Jadi, total kerugian X dapat dinyatakan sebagai

$$X = X_I + X_R. \quad (5.6)$$

Syuhada dkk. (2021) membangun model reasuransi sebagai berikut.

$$X_I = L_I(X) = X - c(X - d)_+, \quad (5.7)$$

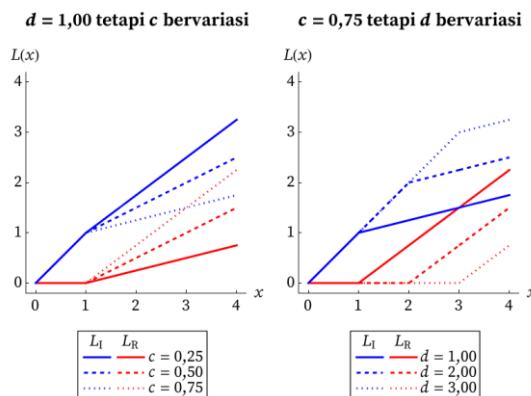
$$X_R = L_R(X) = c(X - d)_+, \quad (5.8)$$

yang merupakan kombinasi dari **model reasuransi stop-loss (SL)** dengan batas retensi (*retention limit*) $d \in (0, \infty)$ dan **model reasuransi proporsional/quota-share (QS)** dengan proporsi $c \in (0, 1]$. Grafik fungsi kerugian L_I dan L_R untuk model reasuransi di atas diberikan pada Gambar 5.6. Misalkan X memiliki fungsi kesintasan $\bar{F}_{X;\theta}(\cdot)$ yang kontinu dan turun pada selang $(0, \infty)$ dengan titik diskontinuitas yang mungkin pada $x = 0$. Fungsi kesintasan dari X_I dan X_R , berturut-turut, adalah

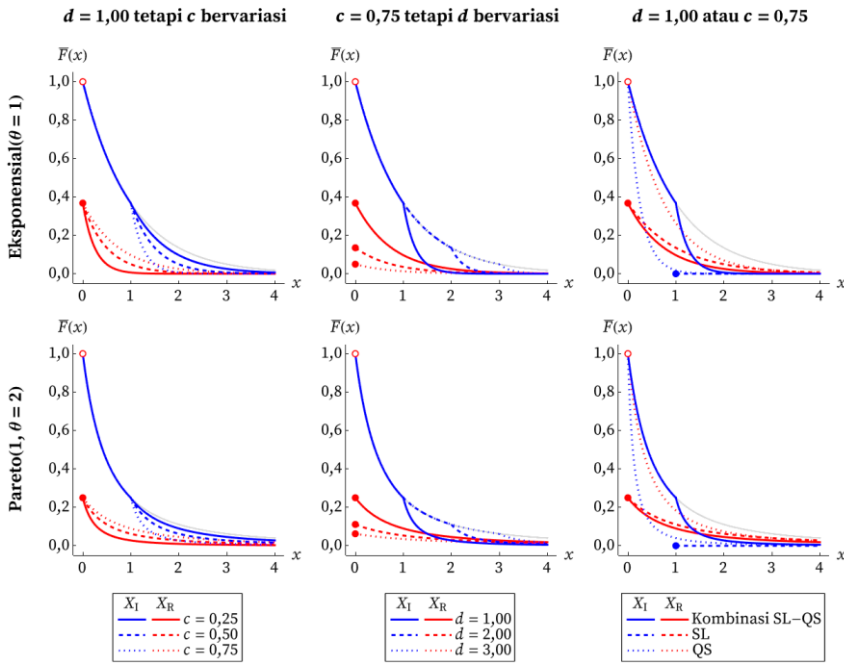
$$\bar{F}_{X_I;\theta}(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ \bar{F}_{X;\theta}(x), & 0 \leq x < d, \\ \bar{F}_{X;\theta}\left(\frac{x - dc}{1 - c}\right), & x \geq d, \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\bar{F}_{X_R;\theta}(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ \bar{F}_{X;\theta}\left(\frac{x}{c} + d\right), & x \geq 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Untuk X yang memiliki distribusi eksponensial, $\mathcal{E}(\theta)$, atau Pareto, $\mathcal{P}(1, \theta)$, grafik fungsi kesintasan tersebut diberikan pada Gambar 5.7.



Gambar 0.27 Grafik fungsi kerugian perusahaan asuransi dan reasuransi.



Gambar 0.28 Grafik fungsi kesintasan kerugian perusahaan asuransi dan reasuransi.

Total kerugian yang ditanggung oleh perusahaan asuransi adalah nilai kerugian X_I ditambah dengan premi $\Pi_{\theta}^{d,c}(X_R)$ yang harus dibayarkan oleh perusahaan asuransi ke perusahaan reasuransi, yaitu

$$T_I = X_I + \Pi_{\theta}^{d,c}(X_R). \tag{5.11}$$

Sementara itu, total kerugian perusahaan reasuransi adalah nilai kerugian X_R dikurangi dengan premi $\Pi_{\theta}^{d,c}(X_R)$ yang diterima dari perusahaan asuransi, yaitu

$$T_R = X_R - \Pi_{\theta}^{d,c}(X_R). \tag{5.12}$$

Secara khusus, Syuhada dkk. (2021) mempertimbangkan prinsip premi ekspektasi atau EVPP (*expected-value principle premium*), yaitu

$$\Pi_{\theta}^{d,c;b}(X_R) = (1 + b)E_{\theta}(X_R) = (1 + b)cK_{\theta}(d), \tag{5.13}$$

dengan faktor *loading* $b > 0$ dan $K_{\theta}(d) = E_{\theta}[(X - d)_+] = \int_d^{\infty} \bar{F}_{X;\theta}(x) dx$. Perhatikan bahwa jika kerugian perusahaan reasuransi X_R terlalu besar, maka premi $\Pi_{\theta}^{d,c;b}(X_R)$ yang harus dibayarkan oleh perusahaan asuransi ke perusahaan reasuransi juga terlalu besar. Sebaliknya, agar premi $\Pi_{\theta}^{d,c;b}(X_R)$

kecil, perusahaan asuransi harus membagikan kerugian X_R yang kecil ke perusahaan reasuransi dan harus menanggung kerugian X_I yang cukup besar. Dengan demikian, perusahaan asuransi memerlukan **model reasuransi optimal**. Model ini dapat ditentukan dengan mencari batas retensi d dan proporsi c yang meminimumkan ukuran risiko dari total kerugian perusahaan asuransi dan/atau reasuransi.

Dengan memanfaatkan Aksioma TI (*translational invariance*) dan PH (*positive homogeneity*), Syuhada dkk. (2021) menunjukkan bahwa ukuran risiko VaR dari total kerugian perusahaan asuransi dan reasuransi dirumuskan sebagai

$$\begin{aligned} & \text{VaR}_{1-\alpha_I;\theta}^{d,c;b}(T_I) \\ &= \text{VaR}_{1-\alpha_I;\theta}(X) - c[d \vee \text{VaR}_{1-\alpha_I;\theta}(X) - d - (1+b)K_\theta(d)], \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} & \text{VaR}_{1-\alpha_R;\theta}^{d,c;b}(T_R) \\ &= c[\text{VaR}_{1-\alpha_R;\theta}(X) - d - (1+b)K_\theta(d)], d \leq \text{VaR}_{1-\alpha_R;\theta}(X), \end{aligned} \tag{5.15}$$

dengan $\alpha_I, \alpha_R \in (0, \bar{F}_{X;\theta}(0))$. Sementara itu, ukuran risiko ES dari total kerugian perusahaan asuransi dan reasuransi adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & \text{ES}_{1-\alpha_I;\theta}^{d,c;b}(T_I) \\ &= \text{ES}_{1-\alpha_I;\theta}(X) - c \left\{ d \vee \text{VaR}_{1-\alpha_I;\theta}(X) + \frac{1}{\alpha_I} K_\theta [d \vee \text{VaR}_{1-\alpha_I;\theta}(X) - d - (1+b)K_\theta(d)] \right\}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

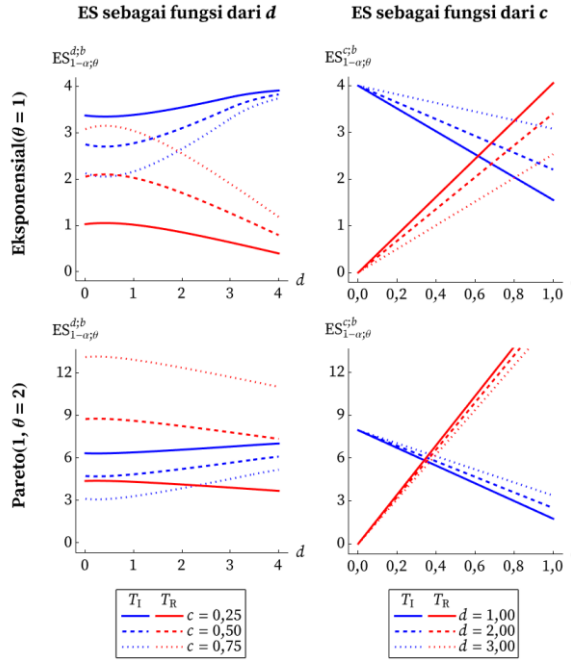
$$\begin{aligned} & \text{ES}_{1-\alpha_R;\theta}^{d,c;b}(T_R) \\ &= c[\text{ES}_{1-\alpha_R;\theta}(X) - d - (1+b)K_\theta(d)], d \leq \text{VaR}_{1-\alpha_R;\theta}(X). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Untuk X yang memiliki distribusi eksponensial, $\mathcal{E}(\theta)$, atau Pareto, $\mathcal{P}(1, \theta)$, grafik $\text{ES}_{1-\alpha_I;\theta}^{d,c;b}(T_I)$ dan $\text{ES}_{1-\alpha_R;\theta}^{d,c;b}(T_R)$ diberikan pada Gambar 5.8. Terlihat bahwa $\text{ES}_{1-\alpha_I;\theta}^{d,c;b}(T_I)$ berbanding terbalik terhadap $\text{ES}_{1-\alpha_R;\theta}^{d,c;b}(T_R)$. Dengan kata lain, ES dari total kerugian suatu pihak meningkat seiring penurunan ES dari total kerugian pihak lain. Dengan demikian, Syuhada dkk. (2021) mengusulkan untuk mencari batas retensi d_{opt} dan proporsi c_{opt} dari model reasuransi SL-QS yang optimal dengan meminimumkan kombinasi linier dari $\text{ES}_{1-\alpha_I;\theta}^{d,c;b}(T_I)$ dan $\text{ES}_{1-\alpha_R;\theta}^{d,c;b}(T_R)$, yaitu

$$(d_{\text{opt}}, c_{\text{opt}}) = \arg \min_{(d,c) \in \mathbb{D}} \Psi_{1-\alpha_I, 1-\alpha_R;\theta}^{d,c;b,a}(T_I, T_R), \tag{5.18}$$

$$\text{dengan } \Psi_{1-\alpha_1, 1-\alpha_R; \theta}^{d, c; b, a}(T_L, T_R) = a \text{ES}_{1-\alpha_1; \theta}^{d, c; b}(T_L) + (1-a) \text{ES}_{1-\alpha_R; \theta}^{d, c; b}(T_R), \quad (5.19)$$

untuk suatu bobot $a \in [0, 1]$ dan daerah $\mathbb{D} = (0, \text{Var}_{1-\alpha_R; \theta}(X)] \times (0, 1]$.



Gambar 0.29 Grafik ES dari total kerugian perusahaan asuransi dan reasuransi, dengan $\alpha_1 = 0,05$, $\alpha_R = 0,01$, dan $b = 0,20$.

Dengan memisalkan

$$a^* = \frac{a}{2a-1}, \quad b^* = \frac{1}{1+b}, \quad b_a^* = \frac{a^*-1}{\frac{a^*}{\alpha_1} - \frac{1}{b^*}}, \quad G_\theta^b(d) = d + \frac{1}{b^*} K_\theta(d),$$

$$H_{\alpha_1, \alpha_R; \theta}^a(d) = a^* \left\{ d \vee \text{Var}_{1-\alpha_1; \theta}(X) + \frac{1}{\alpha_1} K_\theta \left[d \vee \text{Var}_{1-\alpha_1; \theta}(X) \right] \right\} - (a^* - 1) \text{ES}_{1-\alpha_R; \theta}(X),$$

Syuhada dkk. (2021) memperoleh $(d_{\text{opt}}, c_{\text{opt}})$ sebagai berikut.

Kasus 1: Untuk $\alpha_1 \leq \alpha_R$, nilai $(d_{\text{opt}}, c_{\text{opt}})$ diperoleh untuk $a > \frac{1}{2}$ sebagai berikut:

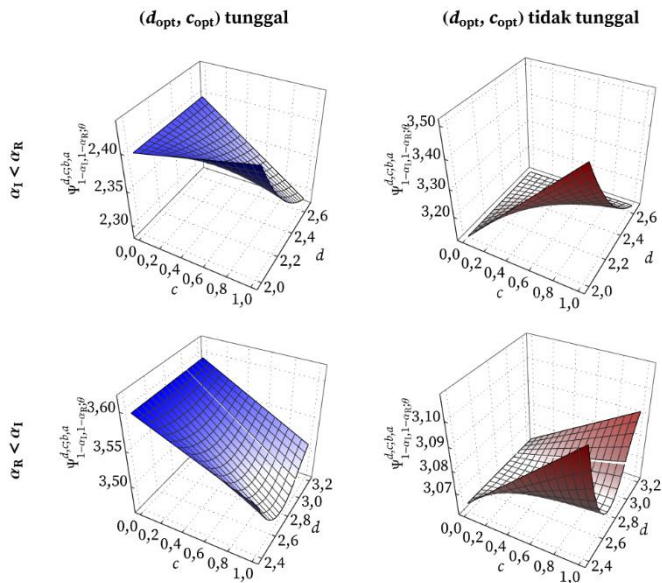
- $(d_{\text{opt}}, c_{\text{opt}}) = (\text{Var}_{1-b^*; \theta}(X), 1)$ jika $\alpha_R < b^* < \bar{F}_{X; \theta}(0)$ dan $G_\theta^b(d) < H_{\alpha_1, \alpha_R; \theta}^a(d)$;
- $(d_{\text{opt}}, c_{\text{opt}}) = (\text{Var}_{1-b^*; \theta}(X), c)$ untuk sebarang $c \in (0, 1]$ jika $\alpha_R < b^* < \bar{F}_{X; \theta}(0)$ dan $G_\theta^b(d) = H_{\alpha_1, \alpha_R; \theta}^a(d)$;

- c. $(d_{\text{opt}}, c_{\text{opt}}) = (\text{VaR}_{1-\alpha_R; \theta}(X), 1)$ jika $b^* \leq \alpha_R$ dan $G_{\theta}^b(d) < H_{\alpha_I, \alpha_R; \theta}^a(d)$;
- d. $(d_{\text{opt}}, c_{\text{opt}}) = (\text{VaR}_{1-\alpha_R; \theta}(X), c)$ untuk sebarang $c \in (0, 1]$ jika $b^* \leq \alpha_R$ dan $G_{\theta}^b(d) = H_{\alpha_I, \alpha_R; \theta}^a(d)$.

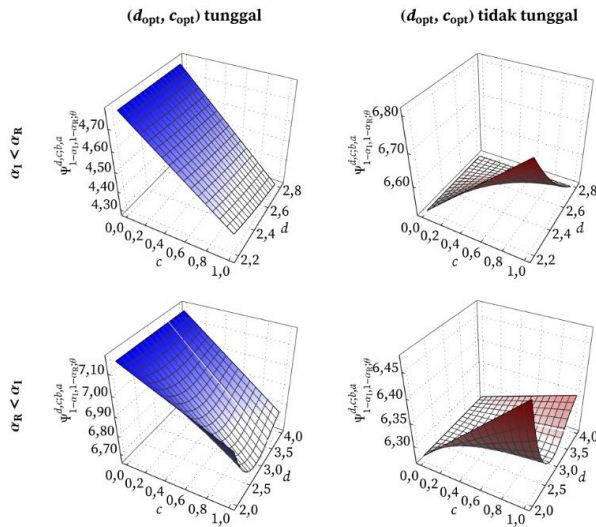
Kasus 2: Untuk $\alpha_R \leq \alpha_I$, nilai $(d_{\text{opt}}, c_{\text{opt}})$ diperoleh untuk $a > \frac{1}{2}$ sebagai berikut:

- a. $(d_{\text{opt}}, c_{\text{opt}}) = (\text{VaR}_{1-b^*; \theta}(X), 1)$ jika $b_a^* \leq \alpha_R$, $\alpha_I < b^* < \bar{F}_{X; \theta}(0)$, dan $G_{\theta}^b(d) < H_{\alpha_I, \alpha_R; \theta}^a(d)$;
- b. $(d_{\text{opt}}, c_{\text{opt}}) = (\text{VaR}_{1-b^*; \theta}(X), c)$ untuk sebarang $c \in (0, 1]$ jika $b_a^* \leq \alpha_R$, $\alpha_I < b^* < \bar{F}_{X; \theta}(0)$, dan $G_{\theta}^b(d) = H_{\alpha_I, \alpha_R; \theta}^a(d)$;
- c. $(d_{\text{opt}}, c_{\text{opt}}) = (\text{VaR}_{1-\alpha_R; \theta}(X), 1)$ jika $b^* < a^* b^* < \alpha_I$ dan $G_{\theta}^b(d) < H_{\alpha_I, \alpha_R; \theta}^a(d)$;
- d. $(d_{\text{opt}}, c_{\text{opt}}) = (\text{VaR}_{1-\alpha_R; \theta}(X), c)$ untuk sebarang $c \in (0, 1]$ jika $b^* < a^* b^* < \alpha_I$ dan $G_{\theta}^b(d) = H_{\alpha_I, \alpha_R; \theta}^a(d)$.

Perhatikan bahwa pada Kasus 1ac dan 2ac, nilai $(d_{\text{opt}}, c_{\text{opt}})$ tunggal, sedangkan pada Kasus 1bd dan 2bd, nilai $(d_{\text{opt}}, c_{\text{opt}})$ tidak tunggal. Sebagai ilustrasi, grafik fungsi $\Psi_{1-\alpha_I, 1-\alpha_R; \theta}^{d, c; b, a}(T_I, T_R)$ yang mencapai minimum pada $(d_{\text{opt}}, c_{\text{opt}})$ untuk Kasus 1cd dan 2ab diberikan pada Gambar 5.9 (untuk $X \sim \mathcal{E}(\theta)$) dan Gambar 5.10 (untuk $X \sim \mathcal{P}(1, \theta)$).



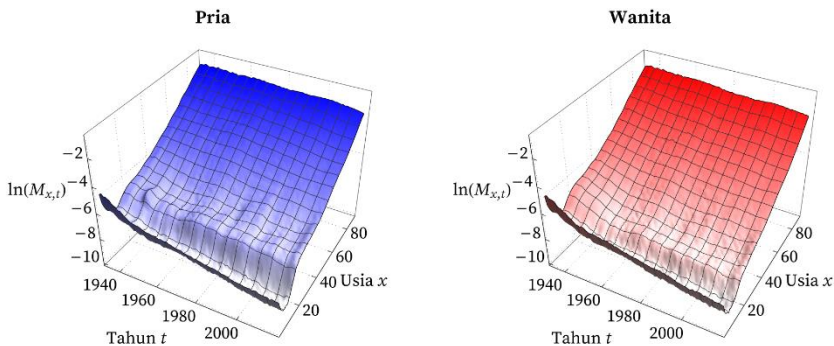
Gambar 0.30 Grafik fungsi kombinasi linier ES dari total kerugian perusahaan asuransi dan reasuransi yang mencapai minimum pada $(d_{\text{opt}}, c_{\text{opt}})$ untuk kerugian Eksponensial($\theta = 1$), dengan $\alpha_I(= 0,05) < \alpha_R(= 0,07)$, $\alpha_R(= 0,03) < \alpha_I(= 0,05)$.



Gambar 0.31 Grafik fungsi kombinasi linier ES dari total kerugian perusahaan asuransi dan reasuransi yang mencapai minimum pada (d_{opt}, c_{opt}) untuk kerugian Pareto(1, $\theta = 2$), dengan $\alpha(= 0,05) < \alpha_R(= 0,07)$, $\alpha_R(= 0,03) < \alpha_I(= 0,05)$.

Risiko Usia Lanjut/Mortalitas

Risiko lain di bidang asuransi adalah **risiko usia lanjut** (RUL, *longevity risk*) yang juga terkait dengan risiko mortalitas (*mortality risk*). RUL merupakan konsekuensi “positif” dari **laju mortalitas** (*mortality rate*) yang semakin rendah, sebagaimana diilustrasikan pada Gambar 5.11. Namun, bagi pihak dana pensiun/asuransi jiwa, RUL adalah risiko (finansial) akibat usia lanjut/panjang seseorang melebihi yang diprediksi. Serangkaian manfaat (anuitas/dana pensiun) yang harus mereka bayarkan ke nasabah melebihi yang diharapkan. Dengan demikian, RUL harus diprediksi secara akurat.



Gambar 0.32 Log laju mortalitas dari penduduk Amerika Serikat berusia $x = 1, 2, \dots, 90$ pada tahun $t = 1933, 1934, \dots, 2018$.

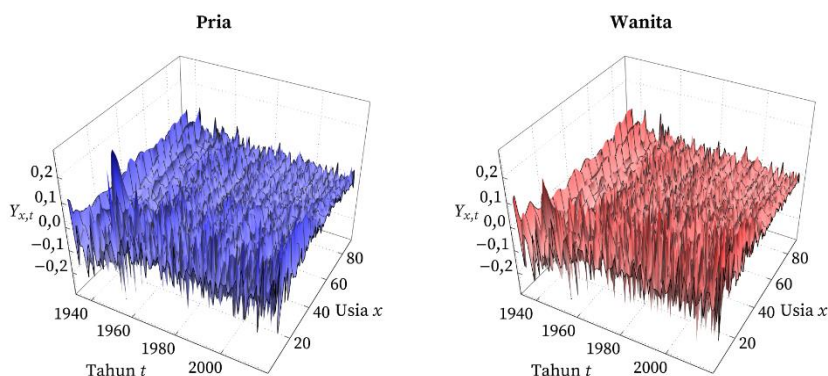
Syuhada dan Hakim (2021) melakukan pemodelan stokastik untuk laju mortalitas yang didefinisikan untuk setiap usia x pada tahun t sebagai berikut.

$$M_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}}, \tag{5.20}$$

dengan $D_{x,t}$ adalah banyak individu berusia x yang meninggal pada tahun t , sedangkan $E_{x,t}$ adalah banyak individu berusia x pada tahun t (yang terpapar risiko kematian, *exposure-to-risk*). Karena $\{M_{x,t}, t \geq t_0\}$ maupun $\{\ln(M_{x,t}), t \geq t_0\}$ (Gambar 5.11) tidak stasioner, didefinisikan **perubahan logaritma laju mortalitas**,

$$Y_{x,t} = \ln(M_{x,t}) - \ln(M_{x,t-1}) = \ln\left(\frac{M_{x,t}}{M_{x,t-1}}\right), \tag{5.21}$$

sebagaimana diilustrasikan pada Gambar 5.12.



Gambar 0.33 Perubahan log laju mortalitas dari penduduk Amerika Serikat berusia $x = 1, 2, \dots, 90$ pada tahun $t = 1934, 1935, \dots, 2018$.

Syuhada dan Hakim (2021) melakukan pemodelan stokastik untuk perubahan log laju mortalitas dengan mengadopsi pemodelan imbal hasil harga aset keuangan, yaitu dengan melibatkan sifat/efek heteroskedastisitas (*heteroscedasticity effect*). Secara khusus, dipilih kombinasi model AR(1) dan ARCH(1) sebagai berikut.

$$\begin{cases} Y_{x,t} = \mu_{x,t} + \epsilon_{x,t} = \mu_{x,t} + \sqrt{\sigma_{x,t}^2} \epsilon_{x,t}, \\ \mu_{x,t} = a_{x,0} + a_{x,1}Y_{x,t-1}, \\ \sigma_{x,t}^2 = b_{x,0} + b_{x,1}\epsilon_{x,t}^2, \end{cases} \tag{5.22}$$

dengan inovasi $\varepsilon_{x,t} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ dan parameter $a_{x,0} \in \mathbb{R}$, $a_{x,1} \in (-1, 1)$, $b_{x,0} > 0$, $b_{x,1} \in [0, 1)$. Jika $\mathcal{F}_{x,t-1}$ adalah informasi sampai tahun $t - 1$, maka $\varepsilon_{x,t} | \mathcal{F}_{x,t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{x,t}^2)$ dan $Y_{x,t} | \mathcal{F}_{x,t-1} \sim \mathcal{N}(\mu_{x,t}, \sigma_{x,t}^2)$.

Perhatikan bahwa volatilitas $\sigma_{x,t}^2$ dari model AR(1)-ARCH(1) di atas terobservasi. Dengan mengadopsi pemodelan imbal hasil pada Syuhada (2020), Syuhada dan Hakim (2021) juga mengasumsikan **volatilitas laten**/takterobservasi, $V_{x,t} = \ln(\sigma_{x,t}^2)$, untuk perubahan log laju mortalitas dan mempertimbangkan kombinasi model AR(1) dan SVAR (*stochastic volatility autoregressive*, orde 1) sebagai berikut.

$$\begin{cases} Y_{x,t} = \mu_{x,t} + \varepsilon_{x,t} = \mu_{x,t} + e^{V_{x,t}/2} \varepsilon_{x,t}, \\ \mu_{x,t} = a_{x,0} + a_{x,1} Y_{x,t-1}, \\ V_{x,t} = b_{x,0} + b_{x,1} V_{x,t-1} + \eta_{x,t}. \end{cases} \quad (5.23)$$

Model AR(1)-SVAR(1) di atas melibatkan dua inovasi $\varepsilon_{x,t} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ dan $\eta_{x,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\eta_x}^2)$ yang saling bebas serta parameter $a_{x,0} \in \mathbb{R}$, $a_{x,1} \in (-1, 1)$, $b_{x,0} \in \mathbb{R}$, $b_{x,1} \in (-1, 1)$, $\sigma_{\eta_x}^2 > 0$. Volatilitas laten $V_{x,t}$ bersifat stokastik dan mengikuti model AR(1) dengan inovasi $\eta_{x,t}$, sehingga $V_{x,t} \sim \mathcal{N}\left(\frac{b_{x,0}}{1-b_{x,1}}, \frac{\sigma_{\eta_x}^2}{1-b_{x,1}^2}\right)$ dan $Y_{x,t} | V_{x,t}, \mathcal{F}_{x,t-1} \sim \mathcal{N}(\mu_{x,t}, e^{V_{x,t}})$.

Selanjutnya, model-model mortalitas stokastik di atas digunakan untuk memprediksi RUL jika diberikan data laju mortalitas $\{M_{x,t}, t = t_0, \dots, n\}$ sampai tahun n . Secara khusus, Syuhada dan Hakim (2021) mengusulkan ukuran risiko **Mortality-at-Risk (MaR)** yang didefinisikan untuk setiap usia x pada tahun $n + \ell$ sebagai berikut.

$$P(M_{x,n} - M_{x,n+\ell} \leq \text{MaR}_{x,n+\ell}^{1-\alpha} | \mathcal{F}_{x,t-1}) = 1 - \alpha, \quad (5.24)$$

untuk suatu $\alpha \in (0, 1)$ dan bilangan bulat positif ℓ . Artinya, $\text{MaR}_{x,n+\ell}^{1-\alpha}$ menyatakan nilai penurunan laju mortalitas terbesar selama periode waktu ℓ tahun ke depan yang dapat ditoleransi pada tingkat keyakinan $1 - \alpha$. Dengan demikian, ukuran risiko ini dapat digunakan untuk mengukur RUL.

Dengan menetapkan $\ell = 1$ dan mengasumsikan model AR(1)-ARCH(1), Syuhada dan Hakim (2021) memperoleh bentuk eksplisit $\text{MaR}_{x,n+1}^{1-\alpha}$ sebagai berikut.

$$\text{MaR}_{x,n+1}^{1-\alpha} = \left[1 - \exp\left(\mu_{x,n+1} + q_{\epsilon_{x,n+1}|\mathcal{F}_{x,n}}^\alpha\right) \right] M_{x,n}. \quad (5.25)$$

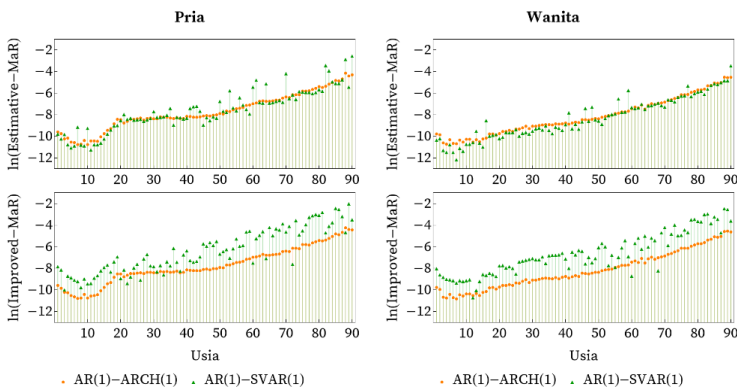
Dalam hal ini, $\mu_{x,n+1} = a_{x,0} + a_{x,1}Y_{x,n}$, dan $q_{\epsilon_{x,n+1}|\mathcal{F}_{x,n}}^\alpha = \sqrt{\sigma_{x,n+1}^2} \Phi^{-1}(\alpha)$ adalah kuantil- α bersyarat dari $\epsilon_{x,n+1} | \mathcal{F}_{x,n}$ yang bergantung pada volatilitas $\sigma_{x,n+1}^2 = b_{x,0} + b_{x,1}\epsilon_{x,n}^2$. Dengan mengasumsikan model AR(1)-SVAR(1), Syuhada dan Hakim (2021) menghitung $\text{MaR}_{x,n+1}^{1-\alpha}$ sebagai berikut:

$$\text{MaR}_{x,n+1}^{1-\alpha} = \left[1 - \exp\left(\mu_{x,n+1} + q_{\epsilon_{x,n+1}}^\alpha\right) \right] M_{x,n}, \quad (5.26)$$

yang ditentukan menggunakan kuantil- α takbersyarat $q_{\epsilon_{x,n+1}}^\alpha$ dari $\epsilon_{x,n+1}$. Kuantil tersebut merupakan solusi dari persamaan

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\epsilon_{x,n+1} \leq q_{\epsilon_{x,n+1}}^\alpha) \\ &= P(\epsilon_{x,n+1} \leq q_{\epsilon_{x,n+1}}^\alpha e^{-v_{x,t}/2}) \\ &= E[\Phi(q_{\epsilon_{x,n+1}}^\alpha e^{-v_{x,t}/2})] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(q_{\epsilon_{x,n+1}}^\alpha e^{-v/2}) \phi\left(\frac{v - b_{x,0}/(1 - b_{x,1})}{\sqrt{\sigma_{\eta_x}^2/(1 - b_{x,1}^2)}}\right) dv. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Hasil perhitungan prediksi MaR (estimative-MaR dan improved-MaR, dalam logaritma) diberikan pada Gambar 5.13. Terlihat bahwa prediksi log MaR bernilai rendah di sekitar usia 10, lalu cenderung meningkat setelah usia 20. Hal ini mengindikasikan bahwa penduduk yang lebih tua mengalami penurunan laju mortalitas yang lebih besar dibandingkan dengan penduduk yang lebih muda.



Gambar 0.34 Prediksi log estimative-MaR dan log improved-MaR^{0,995} dari penduduk Amerika Serikat berusia $x = 1, 2, \dots, 90$ pada tahun $t = 2019$.

MaR yang diprediksi di atas dapat dipandang sebagai ukuran risiko untuk risiko usia lanjut karena MaR mengukur nilai penurunan laju mortalitas terbesar pada tingkat keyakinan tertentu. Di industri asuransi (jiwa) dan dana pensiun, prediksi ukuran risiko ini dapat bermanfaat sebagai landasan dalam perhitungan premi, penentuan cadangan modal, dan pengantisipasi risiko yang lebih besar pada waktu yang akan datang.

6 PENUTUP

Perilaku **risiko stokastik** bersifat dinamis seiring berkembangnya cara berpikir manusia, ketersediaan sumber daya, dan kemajuan teknologi. Sebagai contoh, fenomena risiko yang sebelumnya tidak perlu dikuantifikasi dapat berubah, dan bahkan konsekuensi finansialnya dihitung secara detail. Akibatnya, **model risiko** terus diperbaiki (*improved*) dan diperluas/dimodifikasi (*extended/modified*) hingga memenuhi keakuratan yang diinginkan dan memberikan risiko finansial yang efektif.

Penggunaan teknologi seperti **pembelajaran mesin** (*machine learning*) dan **kecerdasan buatan** (*artificial intelligence, AI*) dapat membantu pemodelan dan prediksi risiko yang lebih akurat. Syuhada dkk. (2023b) telah memulai melakukan hal tersebut dengan membandingkan model risiko berbasis *ensemble learning* dan kelas GARCH. Sementara itu, Syuhada dkk. (2023c) melibatkan dua model risiko, yaitu GA-ARMA-GARCH (*genetic algorithm combined with ARMA-GARCH*) dan AI-KDE (*artificial intelligence with kernel density estimation*).

Literasi teori risiko menjadi sebuah kesempatan sekaligus tantangan bagi **masyarakat kuantitatif** (*quantitative risk society*) yang menginginkan peningkatan kualitas hidup secara seimbang terhadap kondisi finansial.

7 UCAPAN TERIMA KASIH

Dessie Wanda, M.N., Ph.D. (istri), Nabil Khwarizmi Syuhada, Syabil Lutfirrahman Syuhada, Hanin Aysha Syuhada, dan Hana Aysha Syuhada (anak) – *atas doa kebaikan dan keberkahan yang tidak pernah putus serta kesabaran dan kasih sayang selama ini.*

Bapak Ibu: H. Moechtar Haron Al Rosjid dan Hj. Siti Marfu'ah Fadjar (almh.). Ayah Ibu mertua: H. Edward Idris, Hj. Elda Hamzah. Ayah dan Ibu kedua: Abdullah Fadjar, M.Sc. (alm.), Bulik Saifiati – *atas asuhan sayang dan didikan sejak kecil hingga dewasa.*

Kakak adik: Mohamad Arief Khumaidi, S.E., S.S., M.H., Rosmaria Sjafariah Widjajanti, S.S., M.Si., Baju Wibisono, S.E., M.M., Mike Permanasari, S.E., Cht. Dr. Eko Priyotomo, S.P., M.P., Firdaus Wajdi, S.T., Mochamad Subchan Asro, S.T., Fauziah Shanti Cahyani Siti Maisarah, S.T., M.T., serta kakak adik sepupu: Dr. Dien Nurmarina Malik Fadjar, M.A., Isma Safitri, S.Sos., MAKSI – *atas perhatian dan dukungan semangat dalam menempuh studi dan karir.*

Dosen pembimbing studi di perguruan tinggi: Prof. Abdulhamid Alzaid (pascadoktor, King Saud University), Assoc. Prof. Paul Kabaila (dokter, La Trobe University), Assoc. Prof. Gopal Nair (magister berbasis riset, Curtin University of Technology), Prof. Dr. Roberd Saragih (magister), Prof. Sunardi Wirjosudirdjo (alm., magister), Prof. Dr. Sri Haryatmi (sarjana) – *atas limpahan ilmu yang diberikan.*

Guru-guru saat belajar di SMAN Kepanjen-Malang, SMPN Turen-Malang, SDN Sukajadi VIII Bandung – *atas bimbingan ilmu dan dasar pendidikan yang diberikan.*

Prof. Steven Haberman (City University of London), Dr. Mazen Zaindin (King Saud University), Dr. Dianna Starczak (La Trobe University), Prof. Dr. Zanzawi Soejoeti (alm., Universitas Gadjah Mada) – *atas dukungan dalam membangun ilmu dan jejaring riset dunia.*

Pemberi rekomendasi: Prof. Dr. Sri Redjeki P.F., Prof. Dr. M. Salman A. N., Prof. Dr. Zeilly Nurachman, Prof. Dr. Ir. Yogi Wibisono Budhi, Prof. Akhmad Fauzy, Ph.D. (Universitas Islam Indonesia), Prof. Enkelejd Hashorva (University of Lausanne), Prof. Luke Prendergast (La Trobe University) – *atas dukungan untuk mencapai jabatan tinggi.*

Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITB: Ahmad Muchlis, Ph.D. – *atas diberikannya kesempatan menjadi dosen ITB.*

Ketua FGB ITB: Prof. Dr. Edy Tri Baskoro. Prof. Dr. Mindriany Syafila – *atas izin dan rekomendasi dalam pengajuan jabatan guru besar.*

Ketua Senat Akademik ITB. Ketua Senat FMIPA ITB: Prof. Akhmaloka, Ph.D. – *atas dukungan rekomendasi untuk memulai pengajuan kenaikan jabatan guru besar.*

Dekanat FMIPA ITB: Prof. Ir. Wahyu Srigutomo, Ph.D., Prof. Dr. Rukman Hertadi, Dr. Hanni Garminia Y. – *atas rekomendasi awal fakultas dalam memproses kenaikan jabatan guru besar.*

Ketua dan anggota KK Statistika FMIPA ITB: Prof. Udjianna Sekteria Pasaribu, Ph.D., Prof. Dr. Sutawanir Darwis, Drs. Sumanto WH, M.Si., Dumaria Rulina Tampubolon, Ph.D., Prof. Sapto Wahyu Indratno, Ph.D., Dr. RR Kurnia Novita Sari, Dr. Utriweni Mukhaiyar, Yuli Sri Afrianti, M.T., M.B.A., Dr. Sandy Vantika, Dr. Adilan Widyawan Mahdiyasa – *atas kerja sama perkuliahan/pengajaran dan bimbingan mahasiswa.*

Tim/jejaring riset: Dessie Wanda, M.N., Ph.D., Risti Nur'aini, M.Si., Ayu Widyastuti Arif Susilo, M.Si., M.Pd., Chairun Nisah Ardiantari, S.Kep. Listiarini Januari Muhtari, S.E. (FIK Universitas Indonesia), Ir. Mujtahidah Anggriani Ummul Muzayyanah, S.Pt., M.P., Ph.D., IPM. (Universitas Gadjah Mada), Dr. Nurul Hasanah Uswati Dewi, S.E., M.Si., CTA (Universitas Hayam Wuruk Perbanas), Prof. Djoko Suprijanto, Ph.D., Prof. Dr. Muchtadi Intan Detiena, Lukman Hanif Arbi, Ph.D. (FEB Universitas Indonesia), Ade Candra Bayu, M.Si., Suci Fratama Sari, M.Si. (FMIPA Universitas Indonesia), Dr. Arief Rahman Hakim, Fida Fathiyah Addini, M.Si. (FMIPA Universitas Indonesia), Aqilah Pusparani Wibisono, M.Si. (Sunday Insurance Indonesia), Aniq Atiqi Rohmawati, M.Si. (Telkom University), Nurhayati, M.Si. (Universitas Al-Muslim), Rifyan Syahputra Nasution, M.Sc. (Kementerian Perdagangan), Miftahul Jannah, M.Si. (UIN Imam Bonjol), Venansius Ryan Tjahjono, M.Akr. (Milliman Indonesia), Dr. Atina Ahdika (FMIPA Universitas Islam Indonesia), Dr. Mochamad Apri, Prof. Shi-Woei Lin, Octavina, M.Si., M.B.A. (National Taiwan University of Science and Technology) – *atas terbangunnya jejaring riset yang baik dan terus aktif melakukan riset bereputasi.*

Tim pembimbing S-3 Matematika FMIPA ITB: Dr. Oki Neswan, Dr. Ikha Magdalena, Gianto, Ph.D. (Kementerian Perdagangan RI), Dila Puspita, Ph.D., Prof. Dr. Janson Naiborhu – atas kesediaan untuk membangun riset tingkat doktoral.

Guru Besar, Majelis, Kaprodi, Kolega Dosen Matematika FMIPA ITB: Prof. Dr. Edy Soewono, Prof. Dr. Kuntjoro Adji Sidarto, Prof. Marcus Wono Setyabudhi, Ph.D., Prof. Dr. Irawati, Prof. Dr. Pudji Astuti Waluyo, Prof. Iwan Pranoto, Ph.D., Prof. Leo Hari Wiryanto, Ph.D., Prof. Dr. Hendra Gunawan, Prof. Hilda Assiyatun, Ph.D., Prof. Dr. Agus Yodi Gunawan, Prof. Novriana Sumarti, Ph.D., Prof. Dr. Nuning Nuraini, Koko Martono, M.Si. (alm.), Muhammad Syamsuddin, Ph.D. (alm.), Warsoma Djohan, M.Si., Dr. Saladin Uttunggadewa, Yudi Soeharyadi, Ph.D., Dr. Rieske Hadiani, Rinovia Mery Garnierita Simanjuntak, Ph.D., Pritta Etriana Putri, Ph.D., Dr. Dewi Handayani, Dr. Elvira Kusniyanti, Dr. Rudy Kusdiantara, Denny Iwanal Hakim, Ph.D., Ifronika, M.Si. – atas kerja sama akademik dan komunitas.

Kolega dosen FMIPA/ITB: Dr. Endang Soegiartini, Prof. Dr. Eng. Khairurrijal, Prof. Dr. rer. nat. Umar Fauzi, Prof. Ir. Muhammad Ali Zulfikar, Ph.D., Dr. Henry Setyanto, Dr. Khairul Basar, Dr. Deana Wahyuningrum, Prof. Dr. Fatimah Arofiati Noor, Dr. Indra Wibowo – atas kerja sama dalam membangun perkuliahan di level FMIPA/ITB.

Dr. Sri Mardiyati, Dr. techn. Rohmatul Fajriyah – atas kerja sama dalam membangun kegiatan akademik.

Tenaga kependidikan FMIPA dan Matematika ITB: Dei Mahmud, S.T., Teh Yunita Fatmawati, Pak Tatang, Bu Noi Sukmawati, Teh Dina – atas bantuan administrasi akademik dan kepegawaian.

Mahasiswa S-3/S-2/S-1 – atas kesabaran dalam proses perkuliahan dan bimbingan disertasi/tesis/tugas akhir.

Sukono, M.Si., Nia Dewi Nofianti, S.Si. – atas terjalannya kerja sama dengan alumni.

Heru Utomo, Teja Endra Eng Tju – teman terbaik selama sekolah di SMP dan SMA.

Keluarga Flamboyan: Pak Guna, Bu Dewi – atas kebaikan menjadi keluarga di luar Cibinong.

DAFTAR PUSTAKA

- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A., dan Bakken, H. (2009) 'Pair-copula constructions of multiple dependence', *Insurance: Mathematics & Economics*, 44(2), pp. 182–198.
- Acerbi, C. (2002) 'Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion', *Journal of Banking & Finance*, 26(7), pp. 1505–1518.
- Addini, F. dan Syuhada, K. (2020) 'Aggregate risk model and risk measure-based risk allocation', *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2(1), pp. 13–23.
- Adrian, T. dan Brunnermeier, M. K. (2016) 'CoVaR', *American Economic Review*, 106(7), pp. 1705–1741.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., dan Heath, D. (1999) 'Coherent measures of risk', *Mathematical Finance*, 9(3), pp. 203–228.
- Balog, D., Bátyi, T. L., Csóka, P., dan Pintér, M. (2017) 'Properties and comparison of risk capital allocation methods', *European Journal of Operational Research*, 259(2), pp. 614–625.
- Bargès, M., Cossette, H., dan Marceau, E. (2009) 'TVaR-based capital allocation with copulas', *Insurance: Mathematics & Economics*, 45(3), pp. 348–361.
- Bolancé, C. dan Vernic, R. (2020) 'Frequency and severity dependence in the collective risk model: An approach based on Sarmanov distribution', *Mathematics*, 8(9), p. 1400.
- Bollerslev, T. (1986) 'Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity', *Journal of Econometrics*, 31(3), pp. 307–327.
- Bouri, E., Jalkh, N., Molnár, P., dan Roubaud, D. (2017) 'Bitcoin for energy commodities before and after the 2013 crash: diversifier, hedge or safe haven?', *Applied Economics*, 49(50), pp. 5063–5073.
- Bouri, E., Shahzad, S. J. H., dan Roubaud, D. (2020a) 'Cryptocurrencies as hedges and safe-havens for US equity sectors', *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 75, pp. 294–307.

- Bouri, E., Shahzad, S. J. H., Roubaud, D., Kristoufek, L., dan Lucey, B. (2020b) 'Bitcoin, gold, and commodities as safe havens for stocks: New insight through wavelet analysis', *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 77, pp. 156–164.
- Brahim, B., Fatah, B., dan Djabrane, Y. (2018) 'Copula conditional tail expectation for multivariate financial risks', *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 24(1), pp. 82–100.
- Bredin, D., Conlon, T., dan Potì, V. (2017) 'The price of shelter - Downside risk reduction with precious metals', *International Review of Financial Analysis*, 49, pp. 48–58.
- Bühlmann, H. (1967) 'Experience rating and credibility', *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 4, pp. 199–207.
- Cha, J. H. (2019) 'Poisson Lindley process and its main properties', *Statistics & Probability Letters*, 152, pp. 74–81.
- Christoffersen, P. dan Gonçalves, S. (2005) 'Estimation risk in financial risk management', *The Journal of Risk*, 7(3), pp. 1–28.
- Conlon, T., Corbet, S., dan McGee, R. (2020) 'Are cryptocurrencies a safe haven for equity markets? An international perspective from the COVID-19 pandemic', *Research in International Business and Finance*, 54, p. 101248.
- Conlon, T. dan McGee, R. (2020) 'Safe haven or risky hazard? Bitcoin during the Covid-19 bear market', *Finance Research Letters*, 35, p. 101607.
- Cont, R., Deguest, R., dan Scandolo, G. (2010) 'Robustness and sensitivity analysis of risk measurement procedures', *Quantitative Finance*, 10(6), pp. 593–606.
- Cornish, E. A. dan Fisher, R. A. (1938) 'Moments and cumulants in the specification of distributions', *Review of the International Statistical Institute*, 5(4), pp. 307–320.
- Cotter, J. dan Dowd, K. (2006) 'Extreme spectral risk measures: An application to futures clearinghouse margin requirements', *Journal of Banking & Finance*, 30(12), pp. 3469–3485.
- Dhaene, J., Tsanakas, A., Valdez, E. A., dan Vanduffel, S. (2012) 'Optimal capital allocation principles', *The Journal of Risk and Insurance*, 79(1), pp. 1–28.

- Dutta, A., Das, D., Jana, R. K., dan Vo, X. V. (2020) 'COVID-19 and oil market crash: Revisiting the safe haven property of gold and bitcoin', *Resources Policy*, 69, p. 101816.
- Embrechts, P., Puccetti, G., dan Rüschendorf, L. (2013) 'Model uncertainty and VaR aggregation', *Journal of Banking & Finance*, 37(8), pp. 2750–2764.
- Engle, R. F. (1982) 'Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation', *Econometrica*, 50(4), pp. 987–1007.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R., dan Runkle, D. E. (1993) 'On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks', *The Journal of Finance*, 48(5), pp. 1779–1801.
- Hakim, A. dan Syuhada, K. (2023) 'Formulating MCoVaR to quantify joint transmissions of systemic risk across crypto and non-crypto markets: A multivariate copula approach', *Risks*, 11(2), p. 35.
- Hakim, A., Salman, A. N. M., Ashari, Y., dan Syuhada, K. (2022) 'Modifying (M)CoVaR and constructing tail risk networks through analytic higher-order moments: Evidence from the global forex markets', *PLoS ONE*, 17(11), p. e0277756.
- Hernández-Bastida, A., Fernández-Sánchez, M. P., dan Gómez-Déniz, E. (2011) 'Collective risk model: Poisson–Lindley and exponential distributions for Bayes premium and operational risk', *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(6), pp. 759–778.
- Jadhav, D., Ramanathan, T. V., dan Naik-Nimbalkar, U. V. (2009) 'Modified estimators of the expected shortfall', *Journal of Emerging Market Finance*, 8(2), pp. 87–107.
- Jadhav, D., Ramanathan, T. V., dan Naik-Nimbalkar, U. V. (2013) 'Modified expected shortfall: a new robust coherent risk measure', *The Journal of Risk*, 16(1), pp. 69–83.
- Ji, L., Tan, K. S., dan Yang, F. (2021) 'Tail dependence and heavy tailedness in extreme risks', *Insurance: Mathematics & Economics*, 99, pp. 282–293.
- Josaphat, B. P., Ansori, M. F., dan Syuhada, K. (2021) 'On optimization of copula-based extended tail value-at-risk and its application in energy risk', *IEEE Access*, 9, pp. 122474–122485.

- Josaphat, B. P. dan Syuhada, K. (2021) 'Dependent conditional value-at-risk for aggregate risk models', *Heliyon*, 7(7), p. e07492.
- Kabaila, P. dan Syuhada, K. (2008) 'Improved prediction limits for AR(p) and ARCH(p) processes', *Journal of Time Series Analysis*, 29(2), pp. 213–223.
- Kabaila, P. dan Syuhada, K. (2010) 'The asymptotic efficiency of improved prediction intervals', *Statistics & Probability Letters*, 80(17–18), pp. 1348–1353.
- Klein, T., Thu, H. P., dan Walther, T. (2018) 'Bitcoin is not the New Gold – A comparison of volatility, correlation, and portfolio performance', *International Review of Financial Analysis*, 59, pp. 105–116.
- Klugman, S. A., Panjer, H. H., dan Willmot, G. E. (2019) *Loss models: From data to decisions*. Edisi ke-5. Hoboken: John Wiley & Sons.
- Kuan, C.-M., Yeh, J.-H., dan Hsu, Y.-C. (2009) 'Assessing value at risk with CARE, the Conditional Autoregressive Expectile models', *Journal of Econometrics*, 150(2), pp. 261–270.
- Liu, W. (2019) 'Portfolio diversification across cryptocurrencies', *Finance Research Letters*, 29, pp. 200–205.
- Mariana, C. D., Ekaputra, I. A., dan Husodo, Z. A. (2021) 'Are Bitcoin and Ethereum safe-havens for stocks during the COVID-19 pandemic?', *Finance Research Letters*, 38, p. 101798.
- Mauleon, I. dan Perote, J. (2000) 'Testing densities with financial data: an empirical comparison of the Edgeworth-Sargan density to the Students t ', *The European Journal of Finance*, 6(2), pp. 225–239.
- McNeil, A. J., Frey, R., dan Embrechts, P. (2015) *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*. Princeton: Princeton University Press.
- Nakamoto, S. (2008) *Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system*. Tersedia pada: <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf> (Diakses pada: 9 Juli 2021).
- Pitselis, G. (2013) 'Quantile credibility models', *Insurance: Mathematics & Economics*, 52(3), pp. 477–489.
- Pitselis, G. (2016) 'Credible risk measures with applications in actuarial sciences and finance', *Insurance: Mathematics & Economics*, 70, pp. 373–386.
- Popper, N. (2015) *Digital gold: The untold story of Bitcoin*. London: Penguin Books.

- Ren, R., Lu, M.-J., Li, Y., dan Härdle, W. K. (2022) 'Financial risk meter FRM based on expectiles', *Journal of Multivariate Analysis*, 189, p. 104881.
- Rohmawati, A. A. dan Syuhada, K. I. A. (2015) 'Value-at-Risk and Expected Shortfall relationship', *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 53(5), pp. 200–205.
- Syuhada, K. (2020) 'The improved Value-at-Risk for heteroscedastic processes and their coverage probability', *Journal of Probability and Statistics*, 2020, p. 7638517.
- Syuhada, K. dan Hakim, A. (2020) 'Modeling risk dependence and portfolio VaR forecast through vine copula for cryptocurrencies', *PLoS ONE*, 15(12), p. e0242102.
- Syuhada, K. dan Hakim, A. (2021) 'Stochastic modeling of mortality rates and Mortality-at-Risk forecast by taking conditional heteroscedasticity effect into account', *Heliyon*, 7(10), p. e08083.
- Syuhada, K. dan Hakim, A. (2024) 'Risk quantification and validation for green energy markets: New insight from a credibility theory approach', *Finance Research Letters*, 62, p. 105140.
- Syuhada, K., Hakim, A., dan Nur'aini, R. (2023a) 'The expected-based value-at-risk and expected shortfall using quantile and expectile with application to electricity market data', *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 52(7), pp. 3104–3121.
- Syuhada, K., Hakim, A., dan Sari, S. (2021) 'The combined stop-loss and quota-share reinsurance: Conditional tail expectation-based optimization from the joint perspective of insurer and reinsurer', *Risks*, 9(7), p. 125.
- Syuhada, K., Hakim, A., dan Suprijanto, D. (2024a) 'Assessing systemic risk and connectedness among dirty and clean energy markets from the quantile and expectile perspectives', *Energy Economics*, 129, p. 107261.
- Syuhada, K., Hakim, A., Suprijanto, D., Muchtadi-Alamsyah, I., dan Arbi, L. (2022a) 'Is Tether a safe haven of safe haven amid COVID-19? An assessment against Bitcoin and oil using improved measures of risk', *Resources Policy*, 79, p. 103111.
- Syuhada, K., Neswan, O., dan Josaphat, B. P. (2022b) 'Estimating copula-based extension of tail value-at-risk and its application in insurance claim', *Risks*, 10(6), p. 113.

- Syuhada, K., Nur'aini, R., dan Mahfudhotin (2020) 'Quantile-based estimative VaR forecast and dependence measure: A simulation approach', *Journal of Applied Mathematics*, 2020, p. 8276019.
- Syuhada, K. dan Saputra, R. (2015) 'On prediction interval for independent observations', *Applied Mathematical Sciences*, 9(99), pp. 4931–4940.
- Syuhada, K., Suprijanto, D., dan Hakim, A. (2022c) 'Comparing gold's and Bitcoin's safe-haven roles against energy commodities during the COVID-19 outbreak: A vine copula approach', *Finance Research Letters*, 46, p. 102471.
- Syuhada, K., Tjahjono, V., dan Hakim, A. (2023b) 'Dependent metaverse risk forecasts with heteroskedastic models and ensemble learning', *Risks*, 11(2), p. 32.
- Syuhada, K., Tjahjono, V., dan Hakim, A. (2023c) 'Improving Value-at-Risk forecast using GA-ARMA-GARCH and AI-KDE models', *Applied Soft Computing*, 148, p. 110885.
- Syuhada, K., Tjahjono, V., dan Hakim, A. (2024b) 'Compound Poisson–Lindley process with Sarmanov dependence structure and its application for premium-based spectral risk forecasting', *Applied Mathematics and Computation*, 467, p. 128492.
- Tasche, D. (2008) *Capital allocation to business units and sub-portfolios: the Euler principle*. Tersedia pada: <https://arxiv.org/abs/0708.2542> (Diakses pada: 16 Juli 2020).
- Tsay, R. S. (2010) *Analysis of financial time series*. Edisi ke-3. Hoboken: John Wiley & Sons.
- Tse, Y.-K. (2009) *Nonlife actuarial models: Theory, methods and evaluation*. Cambridge: Cambridge University Press.

CURRICULUM VITAE



Nama : Prof. Khreshna Imaduddin Ahmad Syuhada, S.Si., M.Si., M.Sc., Ph.D.
Tempat/tgl lahir : Bandung, 20 Februari 1975
Kel. Keahlian : Statistika
Alamat Kantor : Jalan Ganesa 10, Bandung
Nama Istri : Dessie Wanda, S.Kp., M.N., Ph.D.
Nama Anak : 1. Nabil Khwarizmi Syuhada
2. Syabil Lutfirrahman Syuhada
3. Hanin Aysha Syuhada
4. Hana Aysha Syuhada

I. RIWAYAT PENDIDIKAN

- Doctor of Philosophy (Ph.D.), Statistical Science, La Trobe University, Australia, 2005–2008
- Master of Science by Research (M.Sc.), Mathematics/ Statistics, Curtin University of Technology, Australia, 2001–2003
- Magister Sains (M.Si.), Matematika, Institut Teknologi Bandung, Indonesia, 1998–2000
- Sarjana Sains (S.Si.), Statistika, Universitas Gadjah Mada, Indonesia, 1993–1997

II. RIWAYAT KERJA DI ITB

- Staf Pengajar Matematika FMIPA ITB, 1997 – Sekarang
- Asesor Beban Kerja Dosen (BKD), Sem. I 2022/2023 – Sekarang
- Anggota Senat FMIPA ITB, 2023 – 2027
- Anggota Majelis Keilmuan Matematika ITB, 2014, 2024
- Anggota Board of Reviewer ITB, Agustus 2020 – Desember 2021
- Ketua Program Studi Magister dan Doktor Matematika, Sem. II 2020/2021 – Sem. I 2022/2023
- Ketua Tim Seleksi Calon Mahasiswa Program Studi Doktor Matematika FMIPA ITB, Sem. II 2021/2022
- Ketua Tim Seleksi Calon Mahasiswa Program Studi Magister Matematika FMIPA ITB, Sem. II 2021/2022

- Ketua Tim Seleksi Calon Mahasiswa Program Studi Magister Matematika FMIPA ITB, Sem. II 2020/2021
- Ketua Program Studi Sarjana Aktuaria, Sem. I 2019/2020 – Sem. I 2020/2021
- Ketua Tim Penyusun Kurikulum 2019 Program Studi Sarjana Aktuaria FMIPA ITB, Sem. II 2018/2019
- Ketua Tim Akreditasi Minimum Program Studi Sarjana Aktuaria FMIPA ITB, Sem. I 2018/2019
- Anggota Tim Akreditasi Program Studi Magister Aktuaria FMIPA ITB, Sem. II 2015/2016

III. RIWAYAT KEPANGKATAN

- Pembina Tingkat I, IV/b 1 April 2024
- Pembina, IV/a 1 April 2016
- Penata Tingkat I, III/d 1 Oktober 2013
- Penata, III/c 1 Oktober 2011
- Penata Muda Tingkat I, III/b 1 Oktober 2004
- Penata Muda, III/a 1 Februari 1998

IV. RIWAYAT JABATAN FUNGSIONAL

- Profesor/Guru Besar 1 Juni 2023
- Lektor Kepala 1 September 2015
- Lektor 1 Juni 2011
- Asisten Ahli 1 Januari 2001
- Asisten Ahli Madya 1 April 2000

V. KEGIATAN PENELITIAN

- Ketua Tim Riset Unggulan (ITB, 2024): Modeling multi-population mortality rates and forecasting tail mortality-at-risk by accounting for asymmetric volatility, dependence, and COVID-19
- Anggota Tim Penelitian Multi Disiplin Lintas KK (PPMI FMIPA ITB, 2023, bersama Prof. Dr. M. Salman A. N.): Perumuman parameter pengelompokkan titik graf dan aplikasinya dalam penguantifikasian risiko stokastik sistemis
- Ketua Tim Riset Unggulan (ITB, 2023): Exploring and quantifying loss or risk in renewable energy market: A credibility theory approach

- Ketua Tim Penelitian Dasar Kompetitif Nasional (Kemendikbudristek, 2022): Mata uang virtual: Model, prediksi, dan risiko
- Ketua Tim Penelitian Disertasi Doktor (Kemendikbudristek, 2022): Volatilitas aset keuangan sebelum dan selama Covid-19
- Ketua Tim Riset Unggulan (ITB, 2022): Risiko keuangan dan asuransi berbasis opsi dan efek ukuran risiko VaR dan modifikasi VaR selama pandemi Covid-19
- Ketua Tim Riset KK (PPMI KK FMIPA ITB, 2021): The copula-based extension of Tail Value-at-Risk for Pareto distribution with application in insurance claim
- Ketua Tim Penelitian Dasar Unggulan Perguruan Tinggi (Kemenristek/BRIN, 2020–2021): Risiko sistemik untuk komoditas energi dan teori kredibilitas: Model, analisis dan jaminan risiko
- Ketua Tim Penelitian Dasar Unggulan Perguruan Tinggi (Kemenristek/BRIN, 2020–2021): Forecasting mortality-rate through heteroscedastic model and Mortality-at-Risk during Covid-19 pandemic
- Ketua Tim Penelitian Disertasi Doktor (Kemenristek/BRIN, 2020–2021): Risiko optimal pada asuransi dan reasuransi
- Ketua Tim Research Grant Bank Indonesia (BI Institute, 2021): Pemodelan stokastik untuk memprediksi risiko stablecoin dan Bitcoin dengan melibatkan kebergantungannya terhadap risiko energi dan nilai tukar rupiah-dolar AS selama pandemi COVID-19
- Ketua Tim Penelitian Multi Disiplin Lintas KK (PPMI FMIPA ITB, 2021, bersama Prof. Dr. M. Salman A. N.): Struktur kebergantungan stokastik dan momen order tinggi melalui (vine) copula dan graf: Aplikasi pada prediksi “contagion risk” (CR) institusi keuangan
- Ketua Tim Riset Unggulan (ITB, 2021): Model aktuarial untuk risiko energi dan kebergantungannya dengan imbal hasil aset (virtual) selama pandemi Covid-19
- Anggota Tim Riset Unggulan (ITB, 2021, bersama Prof. Dr. Muchtadi Intan Detiena): Algoritma untuk proteksi risiko nilai tukar mata uang virtual
- Ketua Tim Riset KK (P3MI KK FMIPA ITB, 2020): The adjusted net loss model and its risk measure forecast
- Ketua Tim READI Actuarial Science Applied Research (READI Project Kanada–Indonesia, 2020): Modified copula Expected Shortfall: A new coherent risk measure and its application in energy risk

- Anggota Tim READI Actuarial Science Applied Research (READI Project Kanada–Indonesia, 2020, bersama Arief Rahman Hakim, M.Si.): Prediction of central death rates using stochastic volatility model and its application in longevity risk measurements for joint-life and last survivor insurance policies using copulas
- Anggota Tim Tim READI Actuarial Science Applied Research (READI Project Kanada–Indonesia, 2020, bersama Suci Fratama Sari, M.Si.): Model reasuransi optimal menggunakan quantile-based retention (QbR) dan expectile-based retention (EbR)
- Ketua Tim Riset Unggulan (ITB, 2019): Prediksi pembagian risiko (risk-sharing) dan alokasi keuntungan pada koperasi Indonesia
- Ketua Tim Penelitian Pendidikan Magister menuju Doktor untuk Sarjana Unggul (Kemenristekdikti, 2018): Prediksi risiko VaR-ekstrem pada aset keuangan dan produk asuransi
- Ketua Tim Penelitian Terapan Unggulan Perguruan Tinggi (Kemenristekdikti, 2017–2018): Sifat persistensi pada model keuangan stokastik dan penentuan risiko laju mortalitas
- Ketua Tim Penelitian Berbasis Kompetensi/Hibah Kompetensi (Kemenristekdikti, 2017–2018): Risiko aset keuangan dan produk asuransi: Aplikasi penentuan $QV@R$ dan $EV@R$
- Anggota Tim Penelitian Dasar Unggulan Perguruan Tinggi (Kemenristekdikti, 2018, bersama Dessie Wanda, M.N., Ph.D.): Pengembangan protokol asuhan keperawatan pada anak yang mengalami malnutrisi di rumah sakit mengaplikasikan model prediksi stokastik sebagai alarm malnutrisi
- Ketua Tim Riset Peningkatan Kapasitas Penelitian (ITB, 2015): $V@R$ berbasis Copula untuk model heteroskedastik

VI. PUBLIKASI

A. Dalam Jurnal

- Salman, A. N. M., Hakim, A., dan **Syuhada, K.** (2024) ‘Generalized coefficients of clustering in (un)directed and (un)weighted networks: An application to systemic risk quantification for cryptocurrency markets’, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 135, p. 108046.

- **Syuhada, K.** dan Hakim, A. (2024) 'Risk quantification and validation for green energy markets: New insight from a credibility theory approach', *Finance Research Letters*, 62, p. 105140.
- **Syuhada, K.**, Hakim, A., dan Suprijanto, D. (2024) 'Assessing systemic risk and connectedness among dirty and clean energy markets from the quantile and expectile perspectives', *Energy Economics*, 129, p. 107261.
- **Syuhada, K.**, Tjahjono, V., dan Hakim, A. (2024) 'Compound Poisson–Lindley process with Sarmanov dependence structure and its application for premium-based spectral risk forecasting', *Applied Mathematics and Computation*, 467, p. 128492.
- **Syuhada, K.**, Tjahjono, V., dan Hakim, A. (2023) 'Improving Value-at-Risk forecast using GA-ARMA-GARCH and AI-KDE models', *Applied Soft Computing*, 148, p. 110885.
- **Syuhada, K.**, Hakim, A., dan Nur'aini, R. (2023) 'The expected-based value-at-risk and expected shortfall using quantile and expectile with application to electricity market data', *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 52(7), pp. 3104–3121.
- Hakim, A. dan **Syuhada, K.** (2023) 'Formulating MCoVaR to quantify joint transmissions of systemic risk across crypto and non-crypto markets: A multivariate copula approach', *Risks*, 11(2), p. 35.
- Sari, S., Hakim, A., Magdalena, I., dan **Syuhada, K.** (2023) 'Modeling the optimal combination of proportional and stop-loss reinsurance with dependent claim and stochastic insurance premium', *Journal of Risk and Financial Management*, 16(2), p. 95.
- **Syuhada, K.**, Tjahjono, V., dan Hakim, A. (2023) 'Dependent metaverse risk forecasts with heteroskedastic models and ensemble learning', *Risks*, 11(2), p. 32.
- **Syuhada, K.**, Hakim, A., Suprijanto, D., Muchtadi-Alamsyah, I., dan Arbi, L. (2022) 'Is Tether a safe haven of safe haven amid COVID-19? An assessment against Bitcoin and oil using improved measures of risk', *Resources Policy*, 79, p. 103111.
- Hakim, A., Salman, A. N. M., Ashari, Y., dan **Syuhada, K.** (2022) 'Modifying (M)CoVaR and constructing tail risk networks through analytic higher-order moments: Evidence from the global forex markets', *PLoS ONE*, 17(11), p. e0277756.

- **Syuhada, K.**, Neswan, O., dan Josaphat, B. P. (2022) 'Estimating copula-based extension of tail value-at-risk and its application in insurance claim', *Risks*, 10(6), p. 113.
- **Syuhada, K.**, Suprijanto, D., dan Hakim, A. (2022) 'Comparing gold's and Bitcoin's safe-haven roles against energy commodities during the COVID-19 outbreak: A vine copula approach', *Finance Research Letters*, 46, p. 102471.
- **Syuhada, K.** dan Susilo, A. (2022) 'Moment properties of Markov chain-based claim processes', *Journal of Statistics & Management Systems*, 25(3), pp. 645–664.
- **Syuhada, K.** dan Hakim, A. (2021) 'Stochastic modeling of mortality rates and Mortality-at-Risk forecast by taking conditional heteroscedasticity effect into account', *Heliyon*, 7(10), p. e08083.
- Josaphat, B. P., Ansori, M. F., dan **Syuhada, K.** (2021) 'On optimization of copula-based extended tail value-at-risk and its application in energy risk', *IEEE Access*, 9, pp. 122474–122485.
- Josaphat, B. P. dan **Syuhada, K.** (2021) 'Dependent conditional value-at-risk for aggregate risk models', *Heliyon*, 7(7), p. e07492.
- **Syuhada, K.**, Hakim, A., dan Sari, S. (2021) 'The combined stop-loss and quota-share reinsurance: Conditional tail expectation-based optimization from the joint perspective of insurer and reinsurer', *Risks*, 9(7), p. 125.
- **Syuhada, K.**, Wibisono, A., Hakim, A., Addini, F. (2021) 'Covid-19 risk data during lockdown-like policy in Indonesia', *Data in Brief*, 35, p. 106801.
- **Syuhada, K.** dan Hakim, A. (2020) 'Modeling risk dependence and portfolio VaR forecast through vine copula for cryptocurrencies', *PLoS ONE*, 15(12), p. e0242102.
- **Syuhada, K.** (2020) 'The improved Value-at-Risk for heteroscedastic processes and their coverage probability', *Journal of Probability and Statistics*, 2020, p. 7638517.
- **Syuhada, K.**, Nur'aini, R., dan Mahfudhotin (2020) 'Quantile-based estimative VaR forecast and dependence measure: A simulation approach', *Journal of Applied Mathematics*, 2020, p. 8276019.
- **Syuhada, K.**, Wanda, D., Nur'aini, R., Ardiantari, C., Susilo, A. (2020) 'Statistical risk characteristics and risk scoring of hospital-acquired

- malnutrition for pediatric patients', *Journal of Nutrition and Metabolism*, 2020, p. 4305487.
- Addini, F. dan **Syuhada, K.** (2020) 'Aggregate risk model and risk measure-based risk allocation', *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2(1), pp. 13–23.
 - Trimono, Susilo, A., Handayani, D., dan **Syuhada, K.** (2019) 'Bounds of Adj-TVaR prediction for aggregate risk', *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1(1), pp. 1–7.
 - Nair, G. dan **Syuhada, K.** (2016) 'Stochastic volatility model with Burr distribution error: Evidence from Australian stock returns,' *Thailand Statistician*, 14(1), pp. 1–14.
 - **Syuhada, K.**, Wanda, D., Hartati, S. (2015) 'A simple statistical method for measuring health status for a child: The case of Indonesia', *Journal of Applied Probability and Statistics*, 10(2), pp. 23–32.
 - **Syuhada, K.**, Alzaid, A., dan Djemili, S. (2015) 'Prediction limits for Poisson INAR(1) process', *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*, 47(2), pp. 117–125.
 - **Syuhada, K.** dan Saputra, R. (2015) 'On prediction interval for independent observations', *Applied Mathematical Sciences*, 9(99), pp. 4931–4940.
 - Rohmawati, A. A. dan **Syuhada, K. I. A.** (2015) 'Value-at-Risk and Expected Shortfall relationship', *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 53(5), pp. 200–205.
 - **Syuhada, K.** (2012) 'A note on prediction with misspecified model', *ITB Journal*, 44(3), pp. 217–229.
 - Kabaila, P. dan **Syuhada, K.** (2010) 'The asymptotic efficiency of improved prediction intervals', *Statistics & Probability Letters*, 80(17–18), pp. 1348–1353.
 - Kabaila, P. dan **Syuhada, K.** (2008) 'Improved prediction limits for AR(p) and ARCH(p) processes', *Journal of Time Series Analysis*, 29(2), pp. 213–223.
 - Kabaila, P. dan **Syuhada, K.** (2007) 'The relative efficiency of prediction intervals', *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 36(15), pp. 2673–2686.

B. Dalam Prosiding

- Josaphat, B. P., Neswan, O., dan **Syuhada, K.** (2022) 'The copula-based conditional tail moments for new Pareto-type distribution', *AIP Conference Proceedings*, 2471(1), p. 020011.
- Sari, S. F. dan **Syuhada, K. I. A.** (2022) 'Tail risk measures-based optimal reinsurance model for quota-share reinsurance', *AIP Conference Proceedings*, 2471(1), p. 020010.
- Lestari, T., **Syuhada, K.**, dan Mukhaiyar, U. (2015) 'Bivariate control chart with copula', *AIP Conference Proceedings*, 1692(1), p. 020017.

C. Buku

- **Syuhada, K. I. A.** dan Nur'aini, R. (2019) *Model Risiko: Dari Kerugian Acak Hingga Ukuran Risiko*. Bandung: ITB Press. ISBN 978-602-0705-88-0.
- **Syuhada, K. I. A.**, Nur'aini, R., dan Susilo, A. W. A. (2019) *Imbal Hasil dan Volatilitas: Model dan Prediksi*. Bandung: ITB Press. ISBN 978-602-0705-89-7.

VII. PATEN

- Wanda, D., **Syuhada, K. I. A.**, Nu'aini, R., Falahaini, A., dan Novitasari, P. D. (2020) *Alarm Malnutrisi: Deteksi Dini Kejadian Malnutrisi Didapat Di Rumah Sakit; Modul; Kementerian Hukum dan Hak Asasi Manusia Republik Indonesia*. No. Pencatatan 000227682, No. Permohonan EC00202061198.

VIII. PENGHARGAAN

- Penghargaan 25 Tahun ITB, 2023
- Tanda Kehormatan Satyalancana Karya Satya XX Tahun, 2022
- Dosen Terbaik Bidang Penelitian Kelompok Keilmuan Statistika FMIPA ITB, 2022
- Tanda Kehormatan Satyalancana Karya Satya X Tahun, 2012



📍 Gedung STP ITB, Lantai 1,
Jl. Ganesa No. 15F Bandung 40132
☎ +62 22 20469057
🌐 www.itbpress.id
✉ office@itbpress.id
Anggota Ikapi No. 043/JBA/92
APPTI No. 005.062.1.10.2018

Forum Guru Besar Institut Teknologi Bandung

Jalan Dipati Ukur No. 4, Bandung 40132
E-mail: sekretariat-fgb@itb.ac.id
Telp. (022) 2512532

🌐 fgb.itb.ac.id [FgbItb](#) [FGB_ITB](#)
📱 [@fgbitb_1920](#) [Forum Guru Besar ITB](#)

ISBN 978-623-297-475-3

