

ORASI GURU BESAR EMERITUS

31 Oktober 2009

Profesor Muhammad Ansjar

MATEMATIKA: PEMANFAATAN UNTUK BANGSA DAN KEHIDUPAN BERBANGSA



Majelis Guru Besar
Institut Teknologi Bandung

Judul: **MATEMATIKA: PEMANFAATAN UNTUK BANGSA DAN KEHIDUPAN BERBANGSA**

Disampaikan pada sidang terbuka Majelis Guru Besar ITB,
tanggal 31 Oktober 2009

Hak Cipta dilindungi undang-undang.

Dilarang memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apapun, baik secara elektronik maupun mekanik, termasuk memfotokopi, merekam atau dengan menggunakan sistem penyimpanan lainnya, tanpa izin tertulis dari Penulis.

UNDANG-UNDANG NOMOR 19 TAHUN 2002 TENTANG HAK CIPTA

1. Barang siapa dengan sengaja dan tanpa hak mengumumkan atau memperbanyak suatu ciptaan atau memberi izin untuk itu, dipidana dengan pidana penjara paling lama **7 (tujuh) tahun** dan/atau denda paling banyak **Rp 5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah)**.
2. Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta atau Hak Terkait sebagaimana dimaksud pada ayat (1), dipidana dengan pidana penjara paling lama **5 (lima) tahun** dan/atau denda paling banyak **Rp 500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)**.

Hak Cipta ada pada penulis

Data katalog dalam terbitan

M. Ansjar

MATEMATIKA: PEMANFAATAN UNTUK BANGSA DAN KEHIDUPAN BERBANGSA

Disunting oleh M. Ansjar

Bandung: Majelis Guru Besar ITB, 2009

iv+80 h., 17,5 x 25 cm

ISBN 978-602-8468-03-9

1. Pendidikan Tinggi 1. M. Ansjar

KATA PENGANTAR

Ketika saya diminta menyampaikan presentasi di mimbar yang mulia ini, saya menghadapi dua pilihan antara membahas sesuatu 'dalam' bidang matematika yang selama ini saya geluti, atau sesuatu 'mengenai' matematika. Mengingat perkembangan matematika yang sangat pesat dan meluas, sebagaimana juga bidang-bidang ilmu lainnya, menyadari pula lebarnya spektrum bidang ilmu hadirin yang diharapkan hadir di majelis terhormat ini, menyebabkan saya memutuskan lebih baik bila saya memilih alternatif yang kedua.

Namun, penyebab utama keputusan ini adalah kerisauan yang membebani pikiran dan perasaan saya selama mengamati, mendengar dan menggeluti pembelajaran matematika di tanah air kita ini. Pertanyaan yang selalu menghinggapinya pikiran saya adalah, mengapa demikian banyak pembelajar di semua jenjang pendidikan, yang ingin menghindari matematika di mana mungkin, padahal seluruh dunia mengumandangkan, bahwa matematika itu penting.

Pada kesempatan ini saya ingin mengajak hadirin yang terhormat bersama-sama menelaah permasalahan ini, semoga tumbuh minat untuk berusaha mengatasinya, atau setidaknya turut menyadari bahwa ini adalah permasalahan serius yang dihadapi, yang harus diatasi sesegera mungkin. Matematika bermanfaat bagi bangsa dan kehidupan berbangsa.

Dalam penyajian ini mau tidak mau akan ada teknis matematika yang

akan disinggung, tetapi sebagaimana juga keseluruhannya, akan saya coba menyajikan sesederhana mungkin. Saya berharap dengan ini, para hadirin yang tidak banyak terkait dengan matematika dapat mengikuti dan memahami penyampaian ini dengan mudah, demikian pula siapa pun yang berkesempatan membaca versi tertulisnya.

Semoga dengan kesabaran yang hadirin berikan, semoga apa yang saya harapkan akan kesampaian.

Bandung, 31 Oktober 2009.

Muhammad Ansjar

DAFTAR ISI

	Halaman
I. PENDAHULUAN	1
Motivasi	1
Melihat ke belakang	3
- Matematika di Mesir kuno	3
- Matematika di Babylonia	6
- Matematika di Yunani	7
- Matematika di India	11
- Matematika di Arab	12
- Matematika di Cina	13
- Matematika di Eropah menjelang abad XVI	13
- Matematika abad XVI sampai abad XIX	17
- Matematika di Eropah sesudah abad XIX	19
- Beberapa catatan	21
II. MATEMATIKA	23
Apakah matematika itu?	23
- Beberapa jawaban.....	23
- Penalaran matematika.....	27
- Struktur dan membangun struktur teori matematika.....	29
- Geometri Euclides.....	32
- Dua teori matematika yang bertentangan.....	33
- Generalisasi dan keterkaitan antar konsep.....	34
- Model matematika.....	36
Matematika, Sains, Teknologi dan Rekayasa	37
- Empat serangkai	37
- Sains	38
- Sains, teknologi dan rekayasa	40
- Interaksi dengan matematika	41
- Mathematization of sciences	46

III. MATEMATIKA UNTUK BANGSA DAN KEHIDUPAN BERBANGSA	48
Kontribusi matematika	48
- Matematika sebagai pendukung kesejahteraan spiritual.....	49
- Seni dalam matematika	49
- Penalaran matematika.....	50
- Struktur matematika.....	50
- Matematika sebagai pendukung kesejahteraan fisik	53
Pendidikan matematika dan matematika dalam pendidikan ..	54
- Suatu pandangan sederhana tentang pendidikan dan pendidikan matematika	56
- Beberapa permasalahan utama.....	57
- Pengajar.....	59
- Pendidikan matematika di universitas.....	59
- Tujuan pendidikan matematika.....	60
- Proses pembelajaran.....	61
- Konsep fundamental dan strategis, serta belajar mandiri	62
- Matematika di pendidikan pra-universitas.....	63
- Guru.....	65
- Tujuan pendidikan matematika.....	65
- Pembelajaran.....	66
- Kebijakan umum pelaksanaan pendidikan.....	66
- Suatu catatan.....	66
IV. PENUTUP	69
Kesimpulan	69
Kata penutup	71
RUJUKAN	75
CURRICULUM VITAE	77

I. PENDAHULUAN

MOTIVASI

Seluruh dunia mengumandangkan, bahwa matematika itu penting, bahkan juga di luar peranannya dalam sains, teknologi dan ilmu rekayasa yang tidak dapat diabaikan. Indonesia turut serta mengumandangkan ini.

Sebagai realisasinya, dalam kurikulum hampir semua sekolah di setiap jenjang pendidikan, bahkan juga di pendidikan anak usia dini, matematika merupakan pelajaran yang diwajibkan. Dengan pengecualian di pendidikan anak usia dini, matematika pada umumnya dipandang sebagai pelajaran yang tidak menyenangkan. Disamping hanya beberapa murid sekolah dasar, siswa sekolah menengah dan mahasiswa yang berprestasi tinggi dalam matematika, sebagian besar mereka memandang matematika sebagai mata pelajaran yang menakutkan, yang ingin dihindari di mana mungkin, bahkan juga oleh banyak mahasiswa di program studi yang harus ditunjang oleh pengetahuan matematika. Dalam situasi ini para pembelajar masuk kelas dengan sikap defensif, yang berkontribusi pada ketidakberhasilan pelajaran ini.

Situasi ini merupakan permasalahan nasional yang sangat serius, yang perlu diatasi sesegera mungkin. Penyebab utama diperkirakan adalah kesadaran dan pengertian yang benar tentang manfaat dan pentingnya belajar matematika yang sangat kurang dalam masyarakat.

Kalaupun ada, kesadaran dan pengertian ini hanya terdapat di lingkungan masyarakat yang sangat terbatas. Bahkan, di kalangan pengajar pun patut dicurigai adanya pemahaman yang keliru mengenai matematika.

Pembahasan ini akan dimulai dengan melihat ke belakang, walaupun sepintas, bagaimana matematika semenjak mulai dikenal di dunia ini. Pembahasan ini diikuti dengan pengenalan atas apa dan bagaimana matematika, terutama mengenai penalaran dan struktur teorinya. Dengan mengenal apa dan bagaimana matematika itu, akan ditinjau bagaimana interaksi matematika dengan sains, teknologi dan ilmu rekayasa, setelah terlebih dahulu mengenali sains, teknologi dan rekayasa itu sendiri, walaupun hanya dengan sangat sederhana. Pembahasan ini dimaksudkan sebagai pembuka telaah apa yang dapat dikontribusikan oleh matematika bagi bangsa dan kehidupan berbangsa.

Kontribusi ini hanya dapat direalisasikan dengan mengenal dan memahami matematika dengan baik dan benar. Pengenalan dan pemahaman yang baik dan benar ini dapat diperoleh melalui pendidikan matematika dan pendidikan pada umumnya, serta kegiatan bermatematika, yaitu bekerja dalam dan dengan matematika, yang harus diselenggarakan dengan baik dan benar pula.

Pembahasan dilanjutkan dengan suatu pandangan mengenai pendidikan dan pendidikan matematika. Setelah mengidentifikasi beberapa diantara permasalahan yang dipandang serius, pembahasan

diakhiri dengan pendapat, apa yang penting diperhatikan dalam pelaksanaan pendidikan matematika ditingkat universitas dan pra-universitas, agar pemanfaatan matematika bagi bangsa dan kehidupan berbangsa ini dapat terwujud.

MELIHAT KE BELAKANG.

Sebagai pengantar untuk mengenali apa dan bagaimana matematika walaupun tidak secara komprehensif, ada baiknya melihat sejenak ke belakang, bagaimana matematika yang diketahui mulai dari awal dan kelanjutannya sampai sekarang.

Matematika diketahui sudah ada di Mesir diperkirakan sekitar 3500 tahun sebelum Isa, dan di Babylonia diperkirakan 2000 tahun sebelum Isa. Disamping di dua peradaban yang boleh dikatakan tidak saling berhubungan ini, diketahui pula matematika sudah ada di India semenjak tahun 800 s.I, di Cina semenjak tahun 1300 s.I. dan di Arab mulai tahun 755 M. Walaupun mungkin sudah ada sebelumnya, matematika Yunani baru terkenal mulai tahun 600 s.I. Semenjak Mesir dan Babylonia dikalahkan oleh Iskandar yang Agung dari Yunani, pusat matematika berkisar ke Yunani, sementara matematika di Mesir dan Babylonia mulai meredup. Matematika Yunani ini kemudian turut memberi pengaruh ke India dan Arab, bahkan ke Cina walaupun jauh kemudian. Di Eropah, selain dari di Yunani dan Italia, matematika baru mulai berarti di abad X, dan berkelanjutan sampai sekarang sebagai matematika dunia.

MATEMATIKA DI MESIR KUNO

Bagaimana matematika di peradaban Mesir kuno terungkap dalam dua tulisan di atas papyrus, yang dikenal sebagai Moscow Mathematical Papyrus dan Rhind Mathematical Papyrus, dua peninggalan zaman itu. Kedua tulisan itu berisi berbagai permasalahan matematika yang disertai dengan penyelesaiannya.

Moscow Mathematical Papyrus yang ditemukan tahun 1893 Masehi, diperkirakan ditulis pada tahun 1850 s.I., kira-kira di zaman nabi Ibrahim. Tulisan itu antara lain memberikan rumus untuk volume piramid dengan bidang alas dan bidang atas yang berbentuk bujursangkar. Rumus itu adalah:

$$(h/3)(a^2 + ab + b^2),$$

dengan a dan b berturut-ururt menyatakan sisi bidang alas dan bidang atas, dan h menyatakan tinggi piramid itu. Ini adalah rumus yang tepat. Rumus yang merupakan keterkaitan matematika dengan piramid, suatu karya besar rekayasa, menunjukkan, bahwa ketika itu sudah ada keterkaitan matematika dengan permasalahan dalam rekayasa, atau setidaknya keterkaitan matematika dengan fenomena nyata.

Rhind Mathematical Papyrus yang ditemukan pada tahun 1858 Masehi, adalah naskah yang diperkirakan ditulis pada tahun 1650 s.I., kira-kira ketika nabi Yusuf menjabat sebagai gubernur Mesir. Dalam tulisan ini antara lain diberikan cara menyelesaikan hitungan 70×13 sebagai berikut:

- tuliskan 70 13 /
- kolom pertama dikalikan dengan 2,
kolom kedua dibagi dengan dua, dan diperoleh 140 6 /
dan diingat terdapat kekurangan $\frac{1}{2}$ dari 140;
- kolom pertama dikalikan dengan 2,
kolom kedua dibagi dengan 2, dan diperoleh 280 3 /
- kolom pertama dikalikan lagi dengan 2,
kolom kedua di bagi dengan 2, diperoleh 560 1 /
dan diingat pula ada kekurangan $\frac{1}{2}$ dari 560;
- ruas kiri ditambah dengan kedua kekurangan
semula, yaitu $\frac{1}{2}$ dari 140 dan $\frac{1}{2}$ dari 560,
dan diperoleh 910.

Perhitungan sederhana ini menunjukkan kesesuaian jalan pikiran atau penalaran matematika yang dianut ketika itu dengan yang sekarang. Kalau perhitungan itu diungkapkan dengan rumusan sekarang, bentuknya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 70 \times 13 &= 70 \times 2 \times \frac{17}{2} = 140 \left(6 \frac{1}{2} \right) = 40 \times 6 \frac{140}{2} \\ &= 140 \times 2 \times \frac{6}{2} \frac{140}{2} = 280 \times 3 \frac{140}{2} \\ &= 280 \times 2 \times \frac{3}{2} \frac{140}{2} = 560 \times \left(1 \frac{1}{2} \right) \frac{140}{2} \\ &= 560 \frac{560}{2} \frac{140}{2} = 560 \frac{280}{2} \frac{70}{2} \\ &= 910. \end{aligned}$$

Matematika di zaman Mesir kuno itu sudah mencakup berbagai hal yang terdapat dalam aritmetika, aljabar dan geometri yang kita kenal sekarang. Namun, ketika itu belum ada rumusan mengenai metodologi secara umum, belum ada konsep pembuktian, bahkan juga argumentasi untuk meyakinkan seseorang atas benarnya suatu hasil pemikiran yang berupa prosedur ataupun rumus. Astronomi juga sudah dikenal di Mesir kuno, yang juga sudah dikaitkan dengan matematika. Antara lain, astronomi dan geometri digabungkan untuk menentukan dengan arah mana suatu piramid akan dibangun.

MATEMATIKA DI BABYLONIA.

Bangsa Babylonia dengan kebudayaan yang mencapai puncak di tahun 575 s.I., yaitu di zaman raja Nebuchadnezzar, sebenarnya melanjutkan kebudayaan bangsa Sumeria yang hidup di selatan Mesopotamia. Matematika zaman Mesopotamia terekam dalam peninggalan yang berupa serpihan-serpihan tembikar yang diperkirakan berasal dari tahun 2000 s.I., satu generasi sebelum nabi Ibrahim. Tetapi, kebanyakan peninggalan itu berasal antara tahun 600 s.I. sampai tahun 300 M.

Bangsa Babylonia berhitung dengan sistem bilangan dengan dasar 60. Mereka telah mengenal pengertian akar bilangan yang muncul dalam menentukan panjang diagonal sebuah sikuempat. Mereka mendapatkan hampiran untuk bilangan takrasional $\sqrt{2}$ sebagai 1,414213, yang bila dibandingkan dengan hasil yang diperoleh sekarang, yaitu 1,414214.....,

sesuai sampai dengan desimal kelima. Dalam aljabar, antara lain mereka telah menyelesaikan permasalahan yang melibatkan lima persamaan dengan lima anu (*unknown*), dan permasalahan yang kalau dituliskan dengan notasi sekarang, berupa sistem dua persamaan dengan dua anu.

$$xy = 10$$

$$9(x-y)^2 = x^2.$$

Disamping berbagai materi yang tercakup dalam aritmetika dan aljabar dewasa ini, matematika Babylonia juga mencakup beberapa hal mengenai geometri, walaupun tidak terlalu signifikan. Di Babylonia pun matematika sudah terlihat dikaitkan dengan astronomi. Demikian pula adanya keterkaitan matematika dengan pembangunan irigasi, perdagangan, pemerintahan dan sebagainya.

MATEMATIKA DI YUNANI.

Matematika di Yunani antara tahun 600 s.I. sampai tahun 600 M, biasa dipandang terdiri dari dua periode, yaitu yang disebut periode klasik (600 s.I. – 300 s.I.) dan periode Alexandria (300 s.I. – 600 M), yang diambilkan dari nama Iskandar yang Agung (*Alexandre the Great*). Periode kedua ini diawali ketika Iskandar yang Agung menaklukkan Babylonia dan Mesir. Semenjak itu matematika Mesir dan Babylonia makin banyak dikenal oleh bangsa Yunani, sementara di Mesir dan Babylonia sendiri mulai meredup.

Dalam periode inilah bangsa Yunani mulai dengan pengertian *pengabstrakan dalam matematika*, awal matematika dapat disebut sebagai

pengetahuan abstrak. Kontribusi ini berdampak besar pada pengembangan matematika sekarang. Unsur-unsur dan konsep matematika dipandang sebagai sesuatu yang abstrak, gagasan yang diolah hanya dengan pemikiran, tidak lagi selalu dikaitkan dengan bentuk fisik seperti sebelumnya. Dengan pengabstrakan ini, suatu persamaan aljabar misalnya, dapat digunakan dalam berbagai situasi fisik yang berbeda. Ini juga menunjukkan kesesuaian dengan matematika sekarang yang mengatakan bahwa *suatu persamaan matematika dapat dipandang sebagai model matematika dari berbagai fenomena nyata*. Ini adalah dasar bagi pemanfaatan matematika untuk menyelesaikan berbagai permasalahan di luar matematika.

Sumbangan terbesar yang diberikan bangsa Yunani dalam periode ini adalah tuntutan atas keharusan adanya *pembuktian secara deduktif* atas segala temuan matematika, sebelum dipandang sebagai sesuatu yang baru. Ini merupakan langkah besar dalam matematika. Tidak ada peradaban yang sudah mengembangkan beberapa aritmetika, aljabar dan geometri sampai ketika itu, yang mempunyai gagasan untuk menyimpulkan sesuatu hanya dengan cara deduktif (*deductive reasoning*). Temuan-temuan yang diandalkan dalam berbagai ilmu pengetahuan ketika itu, hanya diperoleh melalui pengalaman, induksi, menggunakan analogi, atau dengan coba-coba.

Bangsa Yunani selalu menginginkan kebenaran (*truth*), dan memastikan bahwa kebenaran itu dapat diperoleh dengan metode

deduksi. Untuk menjamin bahwa yang diperoleh itu sungguh-sungguh merupakan suatu kebenaran, proses deduksi itu juga harus dimulai dari kebenaran. Karena itu, awal setiap pekerjaan matematika mereka selalu dimulai dengan kebenaran awal yang diungkapkan secara eksplisit, yang disebut sebagai *aksioma*. Ini terutama terlihat dalam *Elements* dan *Conic Sections*, dua karya besar matematika hasil pemikiran periode Yunani klasik ini. *Elements* yang ditulis oleh Euclid (365 s.I. – 275 s.I.) dan *Conic Sections* yang ditulis oleh Apollonius (260 s.I. – 200 s.I.), yang meletakkan dasar-dasar geometri yang sekarang dikenal sebagai *geometri Euclides*. Geometri Euclides yang dikembangkan dengan *deductive reasoning* ini mengandung 10 aksioma. Walaupun kedua karya ini secara kronologis termasuk dalam periode Alexandria, namun tulisan itu adalah hasil pemikiran dalam periode Yunani klasik. Kedua karya ini akan dilihat kembali di bagian lain tulisan ini.

Namun, jauh sebelum itu, di awal periode Yunani klasik ini, pemikiran ke arah berpikir deduktif ini telah mulai muncul. Kira-kira tahun 600 s.I. Thales, seorang matematikawan dan pedagang Yunani pernah tinggal beberapa waktu di Mesir untuk bisnis perdagangannya. Namanya dikaitkan dengan beberapa teorema geometri yang sebenarnya telah dikenal jauh sebelumnya di Mesir dan Babylonia, hanyalah karena Thales yang pertama memberikan *bukti* untuk teorema tersebut, walaupun ketika itu belum ada keharusan adanya pembuktian untuk suatu teorema. Teorema-teorema itu adalah sebagai berikut:

- (1) sebuah lingkaran dibagi dua sama besar oleh garis tengahnya;
- (2) sudut alas segitiga sama kaki sama besar;
- (3) sudut pada sisi berlawanan sebuah garis vertikal (*vertically opposite angles*) sama besar.;
- (4) dua segitiga kongruen jika sudut-sudutnya dan sebuah sisinya sama;
- (5) sudut pada sebuah setengah lingkaran 90° (*right*).

Perhatikanlah bahwa teorema-teorema ini adalah juga teorema yang dikenal sekarang.

Thales juga berhasil menentukan tinggi sebuah piramid hanya dengan membandingkan panjang bayang-bayang piramid itu dengan panjang bayang-bayang sebuah tongkat yang diketahui panjangnya. Semua ini adalah geometri, namun geometri secara terstruktur baru dimulai oleh Euclid.

Kontribusi vital lainnya yang diberikan oleh bangsa Yunani dalam periode Alexandria adalah *konsep tentang alam*, yang menempatkan matematika sebagai kunci untuk memahami alam semesta. Ketika itu astronomi sudah melakukan kajian tentang alam semesta. Geometri memegang peranan yang demikian penting, sehingga oleh bangsa Yunani prinsip-prinsip geometri dipandang merepresentasikan struktur alam semesta dengan ruang sebagai komponen utamanya. Wajar bila ketika itu dikatakan bahwa geometri adalah sains ruang fisik. Ketika inilah pula dikembangkan geometri bola yang merupakan salah satu pendukung

penting bidang rekayasa geodesi.

Bangsa Yunani juga melihat dan merasakan nilai estetika dalam matematika. Mereka menilai matematika juga sebagai seni (*arts*), karena keindahan, keharmonisan, kesederhanaan, kejelasan dan keteraturan yang terdapat didalamnya. Aritmetika, geometri dan astronomi mereka pandang sebagai seni bagi pikiran dan musik bagi jiwa. Bagi Aristoteles, keteraturan dan kesimetrian merupakan unsur yang penting bagi keindahan, dan ini terdapat dalam matematika. Bola dan lingkaran dipandang sebagai bentuk yang paling indah dan sempurna. Karena estetika inilah matematikawan Yunani tertarik menjelajahi bidang matematika di luar kegunaannya untuk memahami alam.

Namun demikian, matematika bangsa Yunani itu juga mempunyai banyak kekurangan. Kekurangan inilah yang antara lain merupakan tantangan bagi pengembangan matematika selanjutnya.

MATEMATIKA DI INDIA.

Peradaban Hindu di India diawali sebelum tahun 2000 s.I, akan tetapi, dikenalnya matematika di sana diperkirakan baru pada tahun 800 s.I. Sampai tahun 200 s.I. matematika di India diketahui masih primitif. Baru antara tahun 200 – 1200 Masehi, terlihat adanya perkembangan, terutama setelah dimasuki oleh pengaruh matematika Yunani, yaitu setelah India dikalahkan oleh Iskandar yang Agung. Aljabar dan geometri di India adalah aljabar dan geometri Yunani, disamping beberapa yang sudah

mereka kembangkan sendiri.

Di sekitar abad keempat atau kelima sebelum Isa, di India telah ditemukan nilai hampiran untuk $\sqrt{2}$, tetapi tidak ada petunjuk bahwa nilai tersebut adalah nilai hampiran. Mereka telah berhasil pula membuat lingkaran dengan luas yang sama dengan sebuah bujursangkar. Dalam hal ini, mereka menggunakan konstan 3,09 yang berperan sebagai π dalam geometri sekarang.

Karya mereka yang menarik dalam bilangan takrasional, adalah bahwa mereka sudah mengolah bilangan takrasional sebagaimana mengolah bilangan bulat. Sebagai contoh, rumus:

$$c \quad d = \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd}$$

untuk c dan d bilangan bulat, mereka kembangkan untuk bilangan takrasional \sqrt{a} dan \sqrt{b} , sehingga diperoleh:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

Dengan rumus ini mereka hitung:

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{3 + 12 + 2\sqrt{3}\sqrt{12}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

MATEMATIKA DI ARAB.

Kira-kira satu abad setelah disatukan oleh nabi Muhammad, bangsa Arab menaklukkan daerah yang terletak antara India dan Spanyol,

termasuk pula Afrika Utara dan Italia Selatan.

Bangsa Arab tertarik pada seni dan sains, sehingga ketika kerajaan Arab terpecah menjadi dua kerajaan yang berkedudukan di Bagdad dan Cordova, kedua ibu kota itu menjadi pusat budaya dan sains. Mereka sangat terbuka, sehingga diantara banyak pakar sains yang mereka undang dari Yunani dan Parsi untuk berkiprah di Arab, termasuk juga matematikawan Yahudi dan Nasrani. Mereka menerjemahkan banyak karya-karya Yunani, antara lain *Elements*-nya Euclid, tulisan Ptolemeus dan sebagainya. Terjemahan ini disempurnakan dan juga disertai dengan berbagai komentar. Terjemahan-terjemahan bangsa Arab inilah yang kemudian menjadi sumber matematika Eropah, menggantikan karya asli dari Yunani yang tidak lagi ditemukan.

Umumnya, apa yang dipunyai bangsa Arab adalah pengetahuan bangsa Yunani yang mereka peroleh, baik langsung melalui manuskrip Yunani, maupun melalui versi Syria dan Hebrew.

Dalam aljabar, bangsa Arab ketika itu juga banyak menggunakan operasi aljabar atas bilangan takrasional yang dimulai di India. Ketika itu, tidak asing lagi ungkapan:

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}, \quad \text{dan} \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

Mereka juga menyelesaikan persamaan kuadrat, tetapi dengan menuliskannya dalam salah satu bentuk:

$$ax^2 = bx, \quad ax^2 = c, \quad ax^2 + c = bx,$$

$$ax^2 + bx = c, \quad ax^2 = bx + c, \quad ax^2 + bx + c = 0,$$

dengan semua koefisien a, b, c bilangan positif, untuk menghindari penggunaan koefisien negatif.

Dalam geometri, seperti dikatakan di atas, banyak dimunculkan kritik atas *Elements*, disamping komentar yang menunjukkan penghargaan mereka atas keterincian, kecermatan dan ketelitian (*rigour*). Tetapi hal ini tidak terlihat dalam aljabar.

Astronomi di Arab adalah yang dikembangkan oleh Ptolomeous, yang mereka manfaatkan antara lain untuk menetapkan waktu shalat dan menentukan arah kiblat dengan tepat. Berbagai tabel astronomi mereka sempurnakan, peralatan dikembangkan dan berbagai observatorium dibangun. Hampir semua matematikawan Arab ketika itu adalah juga astronom, sebagaimana juga di India.

MATEMATIKA DI CINA.

Matematika yang tertulis di Cina, diperkirakan mulai sekitar 1300 tahun sebelum Isa. Karena ketiadaan kontak dengan dunia luar, matematika Cina berjalan sendiri sampai abad keempat sebelum Isa. Kemunculan dan perkembangan matematika di Cina dipicu oleh tuntutan kebutuhan hidup sehari-hari dalam perdagangan, membuat kalender, dalam administrasi pemerintahan, arsitektur, survai, dan lain-lain. Dengan demikian, matematika ketika itu juga banyak berkisar sekitar

komputasi (aritmetika) dan pengukuran (geometri). Batang penghitung (*counting rod*) yang digunakan di Cina, berkembang menjadi sistem desimal yang tanpa bilangan nol, dan di abad XIV berkembang pula menjadi cempoa.

Terobosan berlanjut dari tahun 220 sampai 1650 dalam komputasi aritmetika dan aljabar, yang seringkali juga terkait dengan astronomi. Diterjemahkannya enam jilid *Elements* ke dalam bahasa Cina di tahun 1607 menandai meluasnya matematika dunia barat masuk ke Cina.

MATEMATIKA DI EROPAH MENJELANG ABAD XVI.

Matematika di Eropah baru mulai sekitar tahun 1200, dengan salah seorang pelopornya adalah Leonardo dari Pisa yang lebih dikenal sebagai Fibonacci. Fibonacci dikenal banyak berkontribusi dalam aritmetika dan teori bilangan, aljabar dan geometri. Hal ini dapat difahami, karena peradaban bangsa-bangsa di Eropah, dengan pengecualian bangsa Yunani dan Itali, baru mulai bangkit setelah adanya gereja. Gereja mulai menyelenggarakan persekolahan, walaupun pada awalnya hanya untuk keperluan keagamaan dan gereja. Persekolahan ini baru dikembangkan oleh pemerintahan sekuler di pertengahan kedua abad VIII, dan dari sekolah-sekolah inilah berasal berbagai universitas, mulai dari universitas yang pertama di Bologna, sampai ke universitas Oxford dan Cambridge yang terkenal sampai sekarang yang baru dibangun pada tahun 1200.

Menarik, bahwa dalam kurikulum sekolah-sekolah yang dibina gereja

itu, matematika dipandang relatif penting. Aritmetika dipandang sebagai sains bilangan, musik sebagai penerapan bilangan, geometri sebagai kajian tentang besaran yang diam (panjang, luas, dan sebagainya), dan astronomi sebagai kajian tentang besaran bergerak. Karena *deductive reasoning* yang dianut dalam bermatematika, pelajaran matematika difungsikan pula sebagai latihan untuk berargumentasi (*reasoning*), yang diperlukan oleh para pendeta dalam kegiatan pengembangan agama dan ilmu keagamaan (*theology*).

Dominasi gereja yang tidak berminat pada hal-hal yang berkaitan dengan dunia nyata, mengakibatkan kegiatan matematika yang diawali dan dibantu oleh karya-karya bangsa Yunani jauh sebelumnya, baru memperlihatkan hasilnya di sekitar tahun 1200 itu.

Dalam periode tahun 1400 sampai tahun 1600 yang dikenal sebagai periode renaissance, kegiatan dalam aljabar dan geometri, terutama trigonometri, tetap berjalan, akan tetapi tidak menghasilkan hal-hal baru yang besar. Namun demikian, proses pengkajian kembali karya matematika Yunani klasik telah melandasi awal kebangkitan matematika di Eropah. Disamping itu, dapat pula dicatat penumbuhan kembali keterkaitan erat antara matematika dengan sains dan teknologi.

Dalam periode ini banyak berkembang kegiatan-kegiatan kemanusiaan yang meliputi juga seni, terutama seni lukis. Kelompok kemanusiaan (*humanist*) dengan tekun menyusun kembali dan mempelajari secara kritis karya-karya Yunani dan Roma yang dapat mereka kumpulkan, termasuk

karya-karya matematika. Karena keyakinan pada doktrin bangsa Yunani ketika itu yang menyatakan bahwa '*mathematics is the essence of the nature's reality*', mereka dengan sungguh-sungguh mempelajari matematika, termasuk matematika yang abstrak, disamping fisika, arsitektur dan berbagai ilmu pengetahuan lain. Ini mereka lakukan untuk dimanfaatkan mendukung pengembangan karya-karya seni mereka. Diantara mereka ada yang sampai menulis buku mengenai matematika untuk seni, bahkan diantaranya ada yang patut dikategorikan sebagai buku matematika, yang juga memuat beberapa hal mengenai optika. Dalam periode inilah perspektif mulai digunakan dalam seni lukis, yang merupakan salah satu keterlibatan langsung matematika dalam seni lukis.

MATEMATIKA DI EROPAH ABAD XVI SAMPAI ABAD XIX.

Pengembangan matematika yang utama di Eropah dalam periode ini, terutama dalam aritmetika dan aljabar, didorong oleh tuntutan perkembangan teknologi dan sains serta kebutuhan praktis lainnya akan hasil-hasil kuantitatif. Di awal abad XVI matematika Eropah meletakkan aritmetika sebagai ujung tombak, karena besarnya tuntutan atas penggunaan perhitungan aritmetika. Aljabar didasarkan pada aritmetika, tidak lagi pada geometri sebagaimana sebelumnya.

Geometri yang selama ini tertinggal, mulai lagi dikembangkan sekitar tahun 1600, diawali dengan geometri proyektif. Di abad XVII juga diciptakan geometri analitik yang dikembangkan oleh Fermat (1601 –

1665) dan Descartes (1596 – 1650). Geometri analitik ini merupakan penerapan metode kuantitatif yang memanfaatkan potensi aljabar, dalam melakukan kajian-kajian geometri. Dasar utamanya adalah menyatakan kurva sebagai persamaan aljabar. Melalui geometri analitik, aljabar dan geometri saling menunjang satu dengan lainnya. Konsep geometri dapat dirumuskan dalam bentuk aljabar dan apa yang ingin diperoleh dalam geometri dapat diturunkan dari rumusan ini secara aljabar. Sebaliknya, dengan menginterpretasikan ungkapan aljabar dalam bentuk geometri, arti dari yang diungkapkan secara intuitif ini dapat ditangkap dan difahami dengan lebih mudah, dan dari sini dapat pula diturunkan secara deduktif sesuatu yang mungkin merupakan kesimpulan baru dalam aljabar.

Kalkulus adalah pencapaian terbesar matematika di abad XVII disamping geometri Euclides. Kalkulus diciptakan di pertengahan kedua abad XVII oleh Newton dan Leibniz secara terpisah dengan pendekatan yang sangat berbeda, dan tanpa berkomunikasi. Namun keduanya sampai pada kesimpulan yang sama, yaitu konsep kalkulus seperti yang kita fahami sekarang.

Kalkulus diciptakan terutama dalam rangka memecahkan berbagai permasalahan dalam sains di abad XVII, yang disimpulkan sebagai empat permasalahan utama. Banyak pakar matematika terkenal waktu itu yang terlibat dalam pemecahan keempat masalah tersebut. Hasil usaha ini disatukan dan disusun oleh Newton sebagai suatu teori yang dikenal

sebagai kalkulus itu.

Leibniz menyusun konsep kalkulus ini berdasarkan pemikiran sendiri, dengan pendekatan yang sangat berbeda, yaitu dengan menggunakan pengertian *infinitesimal* yang tidak begitu sederhana.

Dalam abad XVIII tidak muncul konsep-konsep yang orisinal dan mendasar seperti kalkulus di abad XVII, namun tidak kurang hal-hal penting lainnya yang dihasilkan. Dengan keahlian dalam teknik, penggunaan dan pengembangan daya (*power*) kalkulus dihasilkan antara lain persamaan diferensial, deret takhingga, geometri diferensial, fungsi dengan peubah kompleks, kalkulus variasi dan sebagainya. Walaupun pada awalnya masing-masing hanya sebagai hasil penggunaan kalkulus, namun kemudian menjadi bidang-bidang matematika yang dipandang tersendiri, tetapi saling terkait dengan eratnya. Semua ini memberikan kontribusi yang sangat berarti pada sains, teknologi dan rekayasa, atau pada penerapan matematika pada umumnya.

Dalam aljabar berkembang antara lain teori bilangan dan teori persamaan, serta konsep determinan dan matriks, disamping dirumuskannya teori Galois.

Disamping penyempurnaan geometri proyektif, muncul pula geometri tak-Euclides, disamping geometri diferensial dan geometri aljabar.

Di awal abad XIX disamping perkembangannya, berlangsung pula penyempurnaan dalam analisis matematika. Atas berbagai kekurang-

mantapan konsep dan bukti yang dirasakan, dilakukan penyempurnaan dengan melakukan kembali pembahasan bidang analisis matematika dengan lebih sistematis, teliti dan cermat (*rigorous*).

Teori fungsi peubah real disusun dalam usaha memahami dan menjelaskan berbagai temuan yang diperoleh di abad XIX ini. Persamaan integral dan analisis fungsional juga diawali dalam periode ini, sedangkan topologi dimulai di penghujung periode ini.

Di masa ini pula disadari, bahwa metode analitik jauh lebih efektif dari metode geometri yang selama ini digunakan, sehingga dalam abad ini metode analitik secara berangsur-angsur menggantikan kedudukan metode geometri dalam bermatematika.

MATEMATIKA DI EROPAH SESUDAH ABAD XIX.

Di akhir abad XIX, aksiomatisasi matematika dalam dasar-dasar logika dan teori himpunan memungkinkan penelitian di dua pertiga bagian pertama abad XX menghasilkan teori-teori besar dalam aljabar dan topologi. Pendekatan aksiomatisasi ini telah meningkatkan pula perkembangan teori bilangan, logika, statistik, teori peluang, komputasi, geometri dan kombinatorik.

Di pertengahan pertama abad XX pertumbuhan matematika terutama dirangsang oleh kekuatan abstraksi dan deduksi. Ini merupakan puncak usaha yang telah dilakukan lebih dari dua abad, untuk menarik manfaat dari prinsip matematika dalam mekanika yang dirumuskan oleh Newton.

Sampai akhir abad XX keterkaitan matematika dengan sains, teknologi dan rekayasa telah demikian lanjut dan mantap, dan terus berkembang dengan pesatnya. Perkembangan ini mendorong pula perkembangan metode dan analisis numerik yang mendasari metode dan teknik komputasi yang sangat diperlukan. Kepesatan perkembangan teknik komputasi dimungkinkan oleh perkembangan komputer sebagai alat komputasi. Namun, teori matematika klasik yang terus berkembang pesat selalu menempati kedudukan khusus yang seringkali membuka cakrawala dan penggunaan yang menakjubkan dalam sains, teknologi dan rekayasa.

Tidak sedikit peristiwa besar yang memicu perkembangan matematika, termasuk perang dunia II yang melahirkan riset operasi (*operation research*), dan keunggulan Rusia atas Amerika Serikat dalam teknologi dirgantara dengan diluncurkannya kendaraan angkasa Sputnik, yang mendorong pemerintah Amerika Serikat menanamkan investasi yang besar untuk mempercepat perkembangan matematika.

Perlu dicatat, bahwa dalam usaha memburu ketinggalan dari Rusia, Amerika Serikat mengubah secara drastis pendekatan pendidikan matematika mulai tingkat dasar, dengan yang diperkenalkan sebagai *New Math*. Program ini diikuti hampir seluruh dunia, termasuk Indonesia. Setelah dilakukan cukup lama, ternyata program ini mengalami kegagalan. Sampai sekarang usaha mendapatkan proses pendidikan matematika yang tepat masih terus dijalankan dengan sungguh-sungguh.

BEBERAPA CATATAN.

Setelah melihat kembali kebelakang dapat ditarik beberapa kesimpulan, antara lain seperti berikut ini.

Matematika adalah hasil pemikiran manusia yang wajar, di mana dan bilamanapun ia berada, sehingga dapat diterima oleh setiap orang semua bangsa, walaupun pada awalnya ditumbuhkan dan dikembangkan oleh bangsa-bangsa yang berbeda dan tidak saling kenal. Karya-karya mereka sejalan, dan dengan mudah dapat bergabung menjadi satu kesatuan dan dikembangkan bersama oleh semua bangsa, seperti yang terlihat dewasa ini.

Semenjak awalnya ada, matematika adalah ilmu pengetahuan yang membumi, pengetahuan yang semenjak awal saling berkaitan erat dengan situasi nyata, khususnya dengan alam, dan memberi manfaat pada manusia.

Matematika yang dikembangkan dengan akal dan kearifan manusia juga berperan dalam mengembangkan akal dan kearifan manusia.

Walaupun pertumbuhan dan perkembangan matematika pada awalnya dapat dikatakan acak, namun pada dasarnya mengikuti jalan pikiran yang teratur, yang baru mulai difahami dan dirumuskan di zaman Yunani klasik yang secara singkat dan sederhana disebut sebagai *deductive reasoning*.

II. MATEMATIKA

APAKAH MATEMATIKA ITU?

Pertanyaan ini adalah pertanyaan yang benar dan wajar sekali, bahkan harus dikemukakan dan dijawab sebelum mulai berbicara tentang matematika itu sendiri. Namun menjawabnya tidak mudah, apalagi jawaban sederhana yang tidak menyesatkan, dan dapat difahami oleh penanya yang tidak banyak terlibat dengan matematika. Berbagai jawaban yang diberikan di abad XIX dan abad XX oleh berbagai matematikawan ternama dirumuskan dalam ungkapan yang berbeda. Jawaban itu pada umumnya lebih mengutarakan *bagaimana* matematika itu, dengan mengungkapkan sifat atau kekhasan matematika yang mereka pandang sebagai ciri matematika. Semua jawaban ini benar walau berbeda, dan mungkin lebih tepat bila semuanya digabungkan jadi satu. Perbedaan itu juga mungkin disebabkan oleh tingkat perkembangan matematika yang berbeda pada zaman yang berbeda, misalnya pada abad XIX dan abad XX.

BEBERAPA JAWABAN.

Berikut ini kita simak beberapa diantara jawaban yang diberikan oleh para pakar dalam waktu yang berbeda, walaupun hampir bersamaan.

B. Peirce (1809 – 1880) mengatakan: "*Mathematics is the science which*

draws necessary conclusions.” Sebagaimana umumnya dalam setiap ilmu pengetahuan, setiap teori mengungkapkan berbagai kebenaran (*truth*). Dalam matematika, kebenaran itu disebut sebagai teorema, lemma, aksioma dan sebagainya. Setiap kebenaran dalam matematika harus dapat ditunjukkan, bahwa ia merupakan akibat logis dari berbagai kebenaran yang sudah ada sebelumnya, yang dilakukan dengan cara deduktif (*deductive reasoning*). Inilah yang dimaksudkan Peirce dengan matematika sebagai *'sains yang menarik kesimpulan yang perlu'*, yaitu kesimpulan yang bermanfaat atau akan bermanfaat.

Felix Klein (1849 - 1929) mengatakan: *“Mathematics in general is fundamentally the science of self-evident things.”* Istilah *self evident things* ini memberikan pengertian yang salah, bila istilah itu diartikan sebagai suatu kepastian yang harus dipercaya begitu saja, *'karena memang sudah begitu'*. Seperti sudah diungkapkan, segala kebenaran dalam matematika harus sudah dan selalu dapat ditunjukkan bahwa benar, sesuai dengan kaedah-kaedah matematika. Kebenaran yang digunakan harus dan hanya yang merupakan kebenaran dalam matematika, bukan kebenaran dalam bidang di luar matematika. Dengan pengertian inilah *self evident things* yang dimaksudkan oleh Felix Klein yang diutarakan di atas.

Menarik sekali apa yang dikatakan oleh B.(A.W.)Russell (1872-): *“Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.”* Ungkapan ini diibaratkan oleh Kusno Kromodihardjo (alm), mantan dosen matematika

di ITB, sebagai *“titik hitam yang dicari oleh seorang buta di ruang yang gelap, dan ia sendiri tidak tahu apakah titik hitam itu memang ada.”* Akan tetapi, ungkapan Russel yang membingungkan ini mengandung arti yang dalam. Ungkapan itu menekankan ciri abstrak matematika dan mengisyaratkan bahwa tidak ada artinya suatu pembahasan, atau pembicaraan, apabila tidak dijelaskan terlebih dahulu apa yang dibicarakan. Ini berarti bahwa pembahasan dalam matematika harus selalu didahului dengan penjelasan dan kesepakatan tentang apa yang menjadi pokok bahasan, dan setiap hal baru yang terlibat dalam pembahasan itu. Oleh karena itu, setiap teori matematika diawali dengan *definisi* yang menjelaskan semua itu. Definisi memberikan *atribut* yang menyatakan sifat atau sifat-sifat yang dipandang sebagai ciri sesuatu yang didefinisikan, yang biasanya diungkapkan sebagai satu atau serangkaian *postulat* atau *aksioma*.

Richard Courant (1888 – 1972) menjawab pertanyaan apakah matematika itu dengan lebih hati-hati. Ia menulis buku dengan bersama Herbert Robbins untuk menjawab pertanyaan *What is Mathematics* yang dijadikan juga sebagai judul buku tersebut. Dalam buku yang sudah diterbitkan dalam dua edisi, yaitu tahun 1941 dan tahun 1996, Courant dan Robbin mengatakan antara lain: *“Mathematics as an expression of human mind reflects the active will, contemplative reason, and the desire for aesthetic perfection. Its basic elements are logic and intuition, analysis and construction, generality and individuality.”*

Di bagian lain dikatakan bahwa matematika seharusnya bukan hanya suatu sistem yang menarik kesimpulan dari definisi dan berbagai postulat dengan konsisten, tetapi juga harus menciptakan sesuatu dengan mengikuti naluri matematikawan dengan bebas.

Selanjutnya dikatakan pula, untuk memahami matematika perlu kontak langsung dengan kehidupan matematika, tetapi jangan terjebak dalam berbagai hal teknis yang menyulitkan. Karena itu, buku tersebut menguraikan berbagai bidang matematika, mulai dari teori bilangan, aljabar, geometri, kalkulus sampai dengan topologi dengan menunjukkan pula keterkaitan antara berbagai konsep dan teori tersebut. Buku yang ditulis berbeda dengan kebiasaan buku matematika dengan format definisi – teorema – bukti, menyajikan seluruh materi dengan penuturan yang luwes, tetapi tetap mencakup definisi, teorema dan bukti sebagaimana harusnya dalam matematika. Penekanan diberikan pada proses, latar belakang yang menumbuhkan motivasi, dan secara implisit menanamkan pola berpikir yang harus dianut dalam bermatematika. Buku itu dikomentari oleh Albert Einstein dalam edisi ke-2, dengan mengatakan, bahwa buku itu adalah: "*A lucid representation of the fundamental concepts and methods of the whole field of mathematics.*"

Sejalan dengan yang dikemukakan oleh Courant, Freudenthal menyatakan bahwa matematika jangan dipandang hanya sebagai suatu *body of knowledge*, melainkan juga sebagai suatu kegiatan manusia (*human activity*).

Berbagai jawaban di atas tidak bertentangan, saling melengkapi, dan terakomodasi dalam ungkapan yang dikemukakan oleh Richard Courant.

PENALARAN MATEMATIKA.

Apa yang dikemukakan Courant dalam menjawab *What is mathematics* adalah sesuatu yang patut direnungkan dan difahami. Courant dengan tegas menyatakan keterkaitan matematika dengan alam pikiran manusia dengan mengatakan '*... as an expression of human mind....*', yang sendirinya mencakup pola berpikir dan hasil pemikiran manusia. Matematika mencerminkan pemikiran yang dinamis, berdasarkan pada alasan-alasan yang kuat dan tuntas, menginginkan bukan hanya sekedar kesempurnaan, tetapi kesempurnaan yang estetis. Bermatematika bukanlah kegiatan yang dikekang oleh berbagai aturan yang kaku, tetapi juga membuka peluang untuk berimprovisasi selama dalam koridor yang diperkenankan. Walaupun merupakan keharusan untuk berpikir logis, namun intuisi juga didambakan; walaupun dituntut kemampuan analisis terhadap sesuatu yang dihadapi, namun dikehendaki juga kemampuan membangun sesuatu yang baru; walaupun matematika senantiasa menginginkan perumuman (*generality*), namun hal-hal yang khusus (*individuality*) harus selalu diberi perhatian. Semua ini adalah unsur-unsur dasar dalam bermatematika, yaitu kegiatan dalam matematika dan kegiatan dengan matematika, yang mencakup pengembangan dan penerapannya, termasuk mempelajarinya.

Pola berpikir atau penalaran, sikap dan pola kerja yang harus merupakan kebiasaan yang dituntut dalam bermatematika, sesuai dengan yang dijelaskan di atas, dapat diringkaskan sebagai *berpikir logis, kritis dan konsisten, berpikir dan bekerja sistematis dan cermat, disertai dengan daya kreatif dan inovatif, dan dengan intuisi yang kuat*. Ini harus dijadikan pegangan utama dalam bermatematika.

Segala sesuatu yang diperoleh dengan pola berpikir logis dan konsisten adalah hasil-hasil yang kokoh, karena semua berlandaskan pada dasar yang kuat, dan tidak menimbulkan pertentangan apa pun bebas dan kontradiksi. Berpikir kritis yang selalu mempertanyakan semua yang ditemukan, termasuk terhadap segala masukan dan informasi, memberikan hasil pemikiran yang menuju ke sesuatu yang lengkap dan sempurna.

Daya kreatif yang memicu timbulnya gagasan-gagasan dan cara-cara baru mendorong kepesatan setiap kegiatan bermatematika, sedangkan daya inovatif mendukung keberhasilan usaha pemecahan masalah, karena tidak memaksakan terikat pada pola dan cara yang baku. Intuisi yang kuat dapat memunculkan sesuatu yang diduga akan merupakan kebenaran baru, yang disebut sebagai dugaan atau *conjecture*. Berpikir dan bekerja sistematis dan cermat, memperlancar proses dan memudahkan penelusuran ulang bagaimana diperolehnya berbagai hal baru, dalam rangka melakukan evaluasi.

Dengan demikian, teori matematika yang dibangun dengan

penalaran, sikap dan kemampuan tersebut di atas merupakan teori yang kokoh, konsisten, dan selalu menuju ke kesempurnaan. Setiap kebenaran dalam teori matematika benar-benar merupakan kebenaran yang tidak meragukan dalam lingkup teori terkait, dan karena itu dapat diyakini sepenuhnya.

STRUKTUR DAN MEMBANGUN STRUKTUR TEORI MATEMATIKA.

Teori-teori matematika yang dibangun dengan penalaran, sikap dan pola kerja seperti yang disebutkan di atas memiliki struktur yang kokoh, tidak mudah dipatahkan, konsisten yang berarti bebas dari pertentangan atau kontradiksi, dan selalu menuju ke kesempurnaan. Wajar sekali bila materi atau teori matematika di satu pihak, dan penalaran, sikap dan pola kerja matematika di pihak lain diibaratkan sebagai dua muka mata uang yang tidak dapat dipisahkan. Materi atau teori matematika dapat difahami dengan baik dan benar, hanya bila dipelajari dengan bernalar, bersikap dan berpola kerja seperti yang disebutkan di atas; sementara itu, bernalar, bersikap dan berpola kerja seperti ini hanya dapat difahami dan dikuasai melalui belajar matematika dengan cara yang benar.

Matematika, sebagaimana juga ilmu pengetahuan lain, senantiasa berusaha menemukan kebenaran-kebenaran (*truth*) yang dapat dipandang atau ditetapkan sebagai hukum-hukum dalam masing-masing ilmu pengetahuan terkait. Dalam ilmu pengetahuan alam kebenaran-

kebenaran itu harus dapat ditunjukkan kesesuaiannya dengan hasil pengamatan, baik yang berupa pengamatan langsung dalam alam, atau melalui hasil eksperimen di laboratorium. Kebenaran dalam matematika biasa disebut sebagai preposisi, teorema, lemma, aksioma dan sebagainya, tetapi untuk singkatnya akan disebut saja sebagai teorema dan aksioma. Suatu temuan dalam matematika akan menjadi suatu teorema, apabila dapat ditunjukkan melalui penalaran matematika, bahwa ia merupakan akibat logis dari kebenaran-kebenaran yang sudah ada sebelumnya, atau dengan kalimat lain biasa dikatakan dapat dibuktikan berdasarkan teorema dan aksioma yang sudah ada sebelumnya. Namun demikian, tidak jarang didapatkan suatu teorema didahului dengan munculnya suatu dugaan atas sesuatu yang mungkin merupakan suatu kebenaran baru berdasarkan intuisi. Dugaan yang disebut sebagai *conjecture* ini muncul dalam melakukan telaah atau pengamatan atas berbagai kebenaran atau hal lain di dalam dan mungkin juga di luar matematika, atau hanya berdasarkan pada intuisi semata. Conjecture ini akan tetap sebagai suatu conjecture bila belum dapat ditunjukkan kebenaran atau ketidakbenarannya. Conjecture Fermat bertahan sebagai conjecture lebih dari 250 tahun, sebelum berhasil dibuktikan.

Bila terhadap suatu teorema dirunut balik teorema-teorema atau kebenaran-kebenaran sebelumnya yang mendasari teorema tersebut, maka suatu saat akan ditemukan kebenaran awal yang bukan sebagai akibat logis dari kebenaran mana pun. Kebenaran awal inilah yang

disebut sebagai *aksioma*, yaitu kebenaran yang diakui hanya berdasarkan kesepakatan bersama.

Ada dua kemungkinan, mengapa kesepakatan itu sampai diambil. Yang pertama, kesepakatan atas suatu kebenaran diambil, karena kebenaran itu diyakini benar, tetapi tidak dapat dibuktikan dan tidak pula dapat disangkal. Sebagai salah satu contoh adalah 10 aksioma dalam geometri Euclides.

Yang kedua, kesepakatan bersama itu diambil untuk maksud tertentu. Sebuah aksioma dalam geometri tak Euclides yang bertentangan dengan aksioma kesejajaran dalam geometri Euclides ditetapkan dengan kesepakatan bersama. Kesepakatan ini diambil dalam rangka membuktikan, bahwa aksioma kesejajaran dalam geometri Euclides itu benar-benar suatu aksioma, bukan teorema yang merupakan akibat logis dari sembilan aksioma lainnya.

Untuk kelengkapan penjelasan mengenai struktur matematika dan membangun struktur tersebut, perlu dicatat kembali, bahwa setiap teori atau setiap pembahasan baru selalu dimulai dengan definisi untuk menyamakan pengertian atas pokok bahasan yang dihadapi. Adanya kesamaan pengertian ini memperlancar pembahasan menuju ke titik temu yang sama-sama diyakini sebagai kesimpulan bersama.

Definisi itu sendiri terdiri dari *sebutan* yang merupakan ungkapan atau nama yang didefinisikan, dan *atribut* yang menyatakan ciri yang berupa sifat yang disebut sebagai aksioma atau postulat, karena diberikan

hanya dengan kesepakatan bersama.

Dengan mengenal atribut ini, segera dapat disimpulkan apakah sesuatu yang ditemukan adalah yang dimaksudkan oleh definisi itu atau bukan.

Sebagai contoh, sistem bilangan asli (*sebutan*) didefinisikan sebagai himpunan yang mempunyai lima sifat yang dikenal sebagai postulat Peano (*atribut*).

Teorema mengungkapkan suatu kesimpulan yang diakibatkan oleh suatu persyaratan yang diberikan, yang disebut sebagai *premis*. Sesuatu yang dihadapi dapat diidentifikasi kesesuaiannya dengan suatu teorema dengan memeriksa apakah semua premisnya dipenuhi.

Dengan bahasa yang sederhana dapat disimpulkan, bahwa struktur teori matematika merupakan rangkaian kebenaran yang kokoh dan bebas dari pertentangan, dan dibangun atas dasar persepsi yang sama. Suatu kebenaran tidak dapat dipatahkan, karena merupakan akibat logis dari kebenaran-kebenaran sebelumnya, antara satu kebenaran dan kebenaran yang lain tidak terdapat pertentangan, karena semua dibangun dengan pola berpikir logis, kritis dan konsisten, berdasarkan pada suatu sistem aksioma yang merupakan kebenaran dasar yang disepakati bersama.

GEOMETRI EUCLIDES.

Sebagai gambaran struktur teori matematika seperti yang diuraikan di atas, dapat dilihat dalam geometri Euclides. Dasar teori geometri

Euclides ini adalah karya Euclid (365 s.I. – 275 s.I.) yang dituliskan dalam *Elements* yang terdiri dari 13 jilid, dan dikembangkan selanjutnya oleh Apollonius (260 s.I. – 200 s.I.) yang dituliskannya dalam *Conic Sections* yang terdiri dari 8 jilid. Semua teorema yang terdiri dari 467 teorema dalam *Elements* dan 487 teorema dalam *Conic Sections* adalah akibat logis dari 10 aksioma dalam *Elements*, yang seluruhnya diturunkan dengan *deductive reasoning*. Kedua karya ini, yang ditulis dalam periode Alexandria adalah dua diantara karya besar matematika yang dipandang sebagai sumbangan periode Yunani Klasik, karena karya-karya itu merupakan hasil pemikiran dalam periode tersebut.

DUA TEORI MATEMATIKA YANG BERTENTANGAN.

Dalam matematika dimungkinkan terdapatnya dua teori yang bertentangan. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut ini. Setiap teori matematika terdiri dari teorema-teorema yang merupakan kebenaran yang kalau dirunut, merupakan akibat logis dari suatu sistem aksioma. Misalkan dua teori dibangun dari dua sistem aksioma, dan aksioma-aksioma kedua sistem itu sama, kecuali satu yang bertentangan. Akibat kekonsistenan dalam penalaran matematika, maka semua teorema yang diturunkan dengan melibatkan aksioma yang bertentangan itu juga akan bertentangan. Akan tetapi tidak akan terdapat pertentangan antara teorema-teorema yang penurunannya tidak melibatkan aksioma yang bertentangan itu.

Kenyataan ini tidak menyalahi asas kekonsistenan atau bebas kontradiksi dalam matematika, karena kedua teorema itu dibangun dari sistem aksioma yang berbeda. Ketidakkonsistenan dikatakan terjadi, apabila dari dasar yang sama, dapat diturunkan dua hasil yang bertentangan. Jadi dua teori yang berbeda itu dapat saja bertentangan bila berdasarkan pada sistem aksioma yang bertentangan, akan tetapi masing-masing teori itu tetap konsisten.

Geometri Euclides dan geometri tak Euclides adalah dua geometri yang bertentangan, karena keduanya dibangun oleh 10 sistem aksioma dengan satu diantaranya bertentangan, yaitu aksioma kesejajaran. Akan tetapi, dalam masing-masing geometri itu tidak terdapat satupun pertentangan.

Ada hal yang menarik antara dua geometri yang bertentangan ini. Jika geometri tak Euclides ini dibatasi hanya dalam suatu daerah yang sangat kecil di pusat daerah keberlakuannya, maka kedua geometri itu sama.

Dari kenyataan ini dapat pula disimpulkan, bahwa kebenaran dalam matematika adalah kebenaran yang relatif, bergantung pada sistem aksioma yang mendasarinya. Hal ini berbeda dengan kebenaran dalam ilmu pengetahuan alam yang merupakan kebenaran mutlak, yang harus sesuai dengan kenyataan yang dapat diamati. Karena itu lebih tepat bila kebenaran dalam matematika disebut sebagai keabsahan, absah hanya berdasarkan aksioma dan rangkaian teorema yang mendasarinya.

GENERALISASI DAN KETERKAITAN ANTAR KONSEP.

Salah satu diantara yang sering menjadi pertanyaan dalam melakukan kajian matematika, adalah apa yang harus dilakukan agar suatu konsep yang berlaku dalam lingkup tertentu dapat diperluas keberlakuannya dalam lingkup lain. Pertanyaan ini menjadi penting, karena berbagai hal yang bermanfaat dapat dikembangkan dengan menggunakan konsep ini. Hal ini dapat dilakukan dengan mengungkapkan definisi konsep tersebut dalam ungkapan yang lebih umum. Dengan ungkapan yang umum ini konsep tersebut dapat berlaku dalam lingkup yang baru, dan dalam lingkup semula ungkapan umum itu sama dengan ungkapan semula. Proses ini disebut sebagai *perumuman* atau *generalisasi* dari konsep semula.

Sebagai contoh perumuman konsep, dapat diperhatikan definisi jarak. *Jarak adalah himpunan bilangan real yang diberikan pada setiap pasangan dua titik (sebutan), dengan atribut, (a) bilangan real itu bukan bilangan negatif, dan bilangan nol hanya diperuntukkan bagi dua titik yang berimpit, (b) bilangan itu tidak bergantung dari titik mana jarak itu ditentukan, dan (c) bilangan real yang diberikan pada dua titik tidak mungkin lebih besar dari jumlah bilangan real yang diberikan pada pasangan masing-masing titik itu dengan titik ketiga.*

Definisi ini dapat diperumum dengan suatu ungkapan abstrak, yang mengatakan bahwa *jarak dua titik adalah fungsi bernilai real dengan dua peubah (sebutan), dengan atribut: (a) nilai fungsi itu tak negatif, dan sama dengan nol hanya bila kedua peubah itu sama, (b) tidak bergantung pada urutan*

peubahnya, dan (c) nilai fungsi ini tidak lebih besar dari jumlah dua fungsi, masing-masing dengan salah satu peubahnya diganti dengan peubah ketiga.

Bila untuk fungsi itu diberi notasi j , maka perumuman definisi jarak itu dapat diungkapkan secara formal sebagai berikut:

Andaikan A bukan himpunan hampa.

Fungsi real j dengan daerah definisi $A \times A$ disebut jarak pada A , apabila

(a) $j(x,y) \geq 0$, untuk setiap x, y dalam A ,

$j(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;

(b) $j(x,y) = j(y,x)$ untuk setiap x, y dalam A ;

(c) $j(x,y) \leq j(x,z) + j(z,y)$ untuk semua x, y, z dalam A

Dengan rumusan ini, pengertian jarak dapat diperluas untuk jarak dua fungsi, jarak dua himpunan, dan sebagainya.

Dengan definisi jarak yang diperumum ini dapat diperluas pengertian limit, fungsi kontinu dan sebagainya dalam lingkup yang lebih luas, atau lingkup yang berbeda. Pengertian fungsi kontinu itu sendiri dapat pula diperumum. Kalau awalnya pengertian ini hanya pada himpunan yang dalamnya terdapat pengertian jarak, dengan definisi yang diperumum pengertian ini dapat pula diperluas pada himpunan yang di dalamnya tidak terdapat pengertian jarak.

Disamping itu, terdapat pula keterkaitan antara berbagai konsep dalam teori yang sama ataupun dalam teori yang berbeda. Pemahaman keterkaitan berbagai konsep ini penting dalam bermatematika.

MODEL MATEMATIKA.

Ketika melihat ke belakang di bagian awal tulisan ini tampak bahwa keterkaitan matematika dengan fenomena nyata sudah berawal semenjak matematika ada, dan dimana pun matematika itu berada. Bahkan berbagai konsep matematika muncul, karena dipicu oleh sesuatu atau berbagai fenomena nyata. Dengan adanya keterkaitan ini suatu fenomena dapat dinyatakan sebagai fungsi dalam matematika, yang disebut *model matematika fenomena* itu, dan permasalahan dalam fenomena tersebut dapat pula dinyatakan secara matematika sebagai persamaan-persamaan atau bangun-bangun matematika lainnya, yang disebut *model matematika permasalahan* itu. Inilah yang mendasari proses mempelajari suatu fenomena nyata secara matematika, yaitu dengan mempelajari fungsi yang merupakan model matematika fenomena tersebut melalui kajian atas model matematika permasalahannya.

MATEMATIKA, SAINS, TEKNOLOGI DAN REKAYASA.

EMPAT SERANGKAI.

Matematika, sains dan teknologi dewasa ini sering disebut senapas, yang menunjukkan adanya keeratan hubungan antara ketiganya. Demikian pula halnya dengan teknologi dan rekayasa, sehingga tidak mudah untuk membedakannya. Ini berarti bahwa matematika mempunyai keterkaitan yang erat dengan sains, teknologi dan juga dengan

rekayasa, sehingga matematika, sains, teknologi, dan rekayasa dapat dipandang sebagai empat serangkai. Keterkaitan ini merupakan keterkaitan yang saling membantu dan saling menunjang perkembangan masing-masing, termasuk juga dalam pemanfaatannya bagi masyarakat. Keterkaitan ini telah berlangsung semenjak munculnya matematika dan karya-karya manusia yang sekarang disebut sebagai karya sains, teknologi dan rekayasa, walaupun pada awalnya masih dalam bentuk yang primitif.

Di zaman Mesir kuno dan Babylonia, matematika telah berperan, atau setidaknya terkait dalam pembangunan piramida dan irigasi sebagai karya teknologi dan rekayasa, dalam astronomi sebagai sains, serta dalam perdagangan dan pemerintahan. Keterkaitan yang ditemukan terutama antara matematika dan sains melalui astronomi, berlanjut di zaman Yunani klasik dan di zaman Alexandria. Bahkan ketika itu telah terdapat pula kaitannya dengan ilmu kedokteran melalui astrologi, yang sekalipun bukan sains, tetapi terkait sangat kuat dengan astronomi. Keterkaitan matematika dan sains ini sangat meningkat di Eropah mulai abad XVII, dan berlanjut sampai sekarang.

SAINS.

Salah satu pandangan mengatakan sains sebagai *institutionalized art of inquiry*, seni menyelidik yang dibakukan untuk menerangkan berbagai fenomena atau kejadian yang ditemukan dalam kehidupan sehari-hari.

Pada awalnya yang menjadi sasaran hanyalah yang berkaitan dengan fenomena alam. Jadi, sains dibangun oleh keinginan memperoleh penjelasan yang sistematis mengenai berbagai fenomena tersebut. Sains berusaha menemukan berbagai persyaratan yang memungkinkan terjadinya bermacam fenomena atau kejadian yang menjadi objek kajian. Sasaran yang lebih utama adalah persyaratan yang lebih mendasar, yang diungkapkan dalam rumusan yang umum sebagai hukum dalam bidang di mana fenomena itu diklasifikasikan. Hukum-hukum yang merupakan kebenaran dalam sains ini, harus dapat ditunjukkan kesesuaiannya dengan kenyataan, baik melalui pengamatan langsung ataupun melalui eksperimen yang khusus dilakukan untuk ini. Ciri sistematis yang dituntut dalam penjelasan ini membedakan penjelasan secara sains (*scientific*) dari penjelasan secara awam (*common sense*).

Dewasa ini fenomena yang menjadi objek kajian bukan lagi hanya fenomena alam, melainkan mencakup pula berbagai fenomena sosial, kemanusiaan dan sebagainya. Masing-masing fenomena dapat ditinjau dari sudut berbagai bidang ilmu yang berbeda. Adanya perbedaan prinsip cara menjelaskan antara bidang ilmu yang berbeda menimbulkan pengertian sains alam, sains sosial dan lain-lain, bahkan dikenali pula istilah sains matematika (*mathematical sciences*), sains rekayasa (*engineering sciences*) dan sebagainya. Dengan demikian, yang dimaksud dengan sains seharusnya bukan lagi hanya sains alam atau *natural sciences* atau ilmu pengetahuan alam semata, walaupun sudah menjadi kebiasaan. Dalam

pembahasa selanjutnya, perhatian juga akan diberikan terutama pada sains alam atau ilmu pengetahuan alam.

Disamping mengetahui bagaimana dapat terjadinya suatu fenomena alam, sains alam juga ingin mengetahui bagaimana perilaku, apakah ada dan kalau ada bagaimana keterkaitan suatu fenomena dengan fenomena lain, apa manfaatnya atau bagaimana membuat suatu fenomena itu bermanfaat. Berdasarkan misi yang demikian, dimunculkanlah istilah sains murni (*pure science*) dan sains terapan (*applied science*). Penelitian dalam sains murni yang sering juga disebut sebagai *basic research* adalah usaha menyelidiki alam, baik melalui pengamatan alam secara langsung, melalui eksperimen yang dilakukan khusus untuk ini, ataupun mungkin juga dengan pendekatan teoritis. Semua ini dilakukan semata-mata untuk mengetahui dan memahami alam dengan baik dan benar. Sementara itu penelitian dalam sains terapan berusaha mendapatkan manfaat atau bagaimana hasil-hasil dalam sains (murni) dapat dimanfaatkan bagi kemanusiaan. Dalam sains terapan sangat dipentingkan interpretasi kongkrit dari berbagai preposisi saintifik, yang diarahkan pada pemanfaatan bagi umat manusia.

Hasil-hasil penelitian sains murni seringkali baru menjadi perhatian sains terapan setelah bertahun-tahun. Namun, sains terapan tidak selalu menanti diperolehnya hasil-hasil sains murni. Tidak jarang arah dan topik penelitian dalam sains murni diarahkan oleh permasalahan yang dihadapi dalam sains terapan.

Dari uraian singkat di atas terlihat, bahwa yang membedakan sains murni dan sains terapan adalah aspek yang menjadi perhatian utama dalam pengembangannya dan sikap (*attitude*) para pelaku pengembangan ini, bukan pengkategorian materi sains itu sendiri. Materi dalam sains terapan adalah juga materi dalam sains murni, sehingga wajar dikatakan bahwa '*sains terapan adalah sains murni yang diterapkan*'. Oleh karena itu tidak perlu perbedaan kedua pengertian itu dipermasalahkan. Dengan lebih ekstrim orang mengatakan, bahwa semua dalam sains dapat diterapkan, hanya saja banyak yang belum diketahui bagaimana menerapkannya.

Situasi yang sama juga dihadapi dalam matematika. Istilah matematika murni dan matematika terapan, lebih tepat bila disebut sebagai *matematika* dan *penerapan matematika*.

SAINS, TEKNOLOGI DAN REKAYASA.

Walaupun sains dan teknologi merupakan dua istilah yang hampir selalu muncul berdampingan, namun mungkin tidak mudah melihat atau mengatakan perbedaannya. Teknologi dikenal sebagai usaha memanfaatkan berbagai temuan sains bagi umat manusia. Hal yang sama juga menjadi perhatian dan tujuan pengembangan sains terapan, namun yang berbeda adalah pendekatan dalam mencapai keinginan yang sama ini. Kalau yang menjadi pokok bahasan dalam sains terapan adalah *menemukan manfaat* temuan dalam sains murni, maka perhatian dalam

teknologi lebih terpusat pada *bagaimana agar manfaat itu dapat diwujudkan agar dapat dirasakan* oleh umat manusia. Rekayasa lebih memusatkan perhatian *bagaimana agar manfaat itu dapat direalisasikan, sehingga benar-benar mencapai sasaran*, yaitu dirasakan langsung oleh umat manusia.

INTERAKSI DENGAN MATEMATIKA.

Interaksi matematika dengan sains, teknologi dan rekayasa yang dirasakan sangat intensif dewasa ini tidak hanya sepihak, juga ketika masing-masing masih dalam bentuk primitif. Interaksi itu bukan hanya berupa kontribusi matematika pada sains, teknologi dan rekayasa, tetapi juga berupa kontribusi yang diperoleh matematika dalam pengembangannya. Terwujudnya geometri di zaman Mesir kuno, bukan tidak mungkin disebabkan oleh keperluan untuk menentukan kembali batas-batas tanah yang ditimbun lumpur subur yang dibawa oleh banjir tahunan sungai Nil. Masalah pertanahan ini sudah semenjak lama merupakan salah satu permasalahan yang dihadapi oleh rekayasa geodesi. Walaupun ketika itu tidak dikenal istilah rekayasa sipil, akan tetapi pembangunan piramid di Mesir adalah suatu karya teknologi dan rekayasa yang besar. Sekalipun tidak jelas bagaimana perhitungan matematika yang digunakan dalam perencanaan dan pelaksanaan pembangunannya, namun bentuk piramid sama kaki yang dibangun itu adalah suatu konsep geometri. Seperti telah diungkapkan di awal tulisan ini, di zaman Mesir kuno itu sudah diperoleh rumus yang tepat untuk menghitung volume piramid terpancung.

Kalkulus, salah satu karya besar yang diciptakan di abad XVII sebagaimana sudah diungkapkan, adalah untuk menjawab empat permasalahan dasar yang berasal dari berbagai permasalahan mekanika dan fisika, yang dirumuskan sebagai berikut:

(i) Menentukan laju perubahan suatu fungsi yang diketahui, dan sebaliknya menentukan suatu fungsi yang diketahui laju perubahannya.

Masalah ini adalah permasalahan yang muncul dalam mempelajari masalah gerak dalam mekanika. Dalam menyelesaikan persoalan ini muncul bentuk $0/0$ yang dalam aljabar tidak ada artinya.

(ii) Menentukan garis singgung pada suatu kurva yang diketahui.

Ini adalah murni permasalahan geometri, yang dapat juga ditangani melalui geometri analitik. Permasalahan ini merupakan permasalahan penting dalam melakukan kajian di bidang optik.

(iii) Menentukan nilai maksimum atau minimum suatu fungsi.

Masalah ini muncul dalam kajian gerak peluru. Karena jarak tempuh horizontalnya bergantung pada sudut elevasinya, maka dipertanyakan berapa harusnya sudut elevasi untuk memperoleh jarak horizontal terjauh.

(iv) Menentukan panjang busur, yang terkait dengan jarak yang dijalaninya sebuah planet pada selang waktu tertentu, menentukan luas daerah yang dibatasi oleh sebuah kurva.

Empat masalah yang berbeda baik dalam permasalahannya, maupun dalam area penggunaannya dalam kalkulus ternyata berdasarkan hanya

dua permasalahan, yaitu masalah pendiferensialan dan masalah integral yang dikaitkan oleh suatu teorema dasar dalam kalkulus. Masalah pendiferensialan meliputi masalah menentukan laju perubahan suatu fungsi, masalah menentukan garis singgung kurva dan masalah menentukan nilai maksimum sebuah fungsi. Masalah pengintegralan mencakup masalah menentukan fungsi bila diketahui laju perubahannya dan masalah menentukan luas daerah yang dibatasi oleh sebuah kurva.

Telah semenjak lama dalam fisika digunakan fungsi yang sekarang dikenal sebagai fungsi delta, yaitu $\delta(x - x_0)$ yang bernilai 0 di seluruh sumbu x kecuali pada titik $x = x_0$, tetapi integralnya sepanjang sumbu x sama dengan 1. Fungsi ini tidak konsisten dengan teori fungsi klasik yang biasa dikenal, sesuatu yang tidak boleh terjadi dalam matematika, sehingga fungsi ini mereka sebut sebagai *fungsi singular*. Situasi ini memicu dikembangkannya *teori distribusi* oleh Laurent Schwartz di tahun 1950, yang kemudian dipadukan dalam teori *generalized function* yang telah digagaskan lebih awal tahun 1936.

Metode Elemen Hingga adalah suatu metode perhitungan struktur dalam ilmu rekayasa yang diawali dalam teknik konstruksi pesawat terbang. Metode ini dirumuskan dalam matematika dalam bentuk abstrak, sebagai Matematika Elemen Hingga, yang merupakan salah satu metode penyelesaian berbagai persamaan diferensial secara numerik. Dengan metode ini dapat diselesaikan persamaan diferensial yang merupakan model matematika masalah mekanika fluida. Ini berarti

metode dalam teknik struktur yang merupakan mekanika benda padat, melalui pengabstrakan dan teori matematika dapat dikembangkan untuk digunakan dalam mekanika benda cair.

Di akhir abad XX hasil kajian tentang proses perkembangan gugus jasad renik dalam biologi dirumuskan dalam bahasa matematika sebagai suatu konsep abstrak. Konsep ini membuahkan suatu metode perhitungan yang dikenal sebagai Genetic Algorithm, yang sangat bermanfaat dalam bidang rekayasa dan berbagai bidang lain yang sangat berbeda dari ilmu-ilmu hayati.

Kontribusi matematika pada sains, teknologi dan rekayasa terutama dalam rangka menyelesaikan permasalahan yang dihadapi, atau dalam melakukan kajian tentang berbagai fenomena nyata yang menjadi perhatian. Kontribusi ini dilakukan melalui pemodelan matematika atas permasalahan atau atas fenomena tersebut, dengan melakukan kajian atau menyelesaikan permasalahan model matematika itu. Dalam penyelesaian masalah, matematika banyak pula berkontribusi dalam pengembangan berbagai metode komputasi melakukan telaah atas keabsahan metode-metode itu.

Tuntutan untuk memenangkan perang dunia II oleh sekutu, mendorong pengembangan teknologi yang memicu pula pengembangan berbagai metode penerapan matematika. Bidang *operational research* yang tumbuh sebagai metode matematika untuk memenuhi kebutuhan dalam menyusun perencanaan pelaksanaan invasi sekutu ke Eropah,

berkembang dan sangat berperan dalam berbagai bidang ilmu sampai saat ini, mulai dari menghadapi permasalahan yang sederhana sampai dengan permasalahan yang cukup rumit.

Fisikawan Eugene Wigner (1960) mengatakan sebagai apresiasi atas dukungan matematika pada bidang fisika teori, dengan ucapan: '...*„keajaiban dan kesesuaian bahasa matematika untuk merumuskan hukum-hukum fisika adalah suatu hadiah yang sangat mengagumkan'*. Ungkapan ini mungkin sesuai bukan hanya untuk bidang fisika, tetapi juga untuk berbagai bidang ilmu lainnya.

Mengamati besarnya peranan matematika dalam sains, teknologi dan rekayasa dalam usaha mengenal dan memanfaatkan alam bagi kemaslahatan umat manusia, sangat wajar ungkapan bahwa '*mathematics reveals hidden patterns that help us to understand the world around us*', bahkan lebih tepat lagi bila ditambahkan '*and to live in harmony with the nature and the world*'. Ungkapan tambahan ini menunjukkan bahwa dari matematika dapat ditarik berbagai pelajaran untuk mewujudkan kehidupan bermasyarakat yang harmonis, seperti yang ditunjukkan di bagian lain pembahasan ini.

Ada suatu hal yang menarik, berkaitan dengan interaksi matematika dengan sains. Telah dikemukakan, bahwa geometri Euclides dan geometri tak Euclides merupakan dua geometri yang bertentangan. Namun, dalam daerah yang kecil di pusat daerah keberlakuan geometri tak Euclides itu, kedua geometri itu sama, termasuk kedua aksioma yang bertentangan itu.

Dalam fisika dikenal mekanika Newton yang sesuai untuk kecepatan-kecepatan yang jauh lebih kecil dari kecepatan cahaya, dan mekanika relativitas Einstein yang juga sesuai untuk kecepatan-kecepatan yang mendekati kecepatan cahaya. Jika diberlakukan untuk kecepatan yang jauh lebih kecil dari kecepatan cahaya, kedua mekanika itu sama. Yang membuat menarik adalah bahwa mekanika Newton banyak terkait dengan geometri Euclides, dan mekanika Einstein banyak terkait dengan geometri tak Euclides.

MATHEMATIZATION OF SCIENCES.

Kontribusi matematika dalam bidang sains, terutama dalam fisika, mekanika dan astronomi sangat menguat dan ekstrim di abad XVII, sehingga dikatakan bahwa dalam abad ini terjadi *mathematization of sciences*.

Jauh sebelum abad XVII, menjelang tahun 600 M, para pakar sains sudah sangat terkesan atas apa yang dapat dilakukan oleh matematika dalam usaha mempelajari alam. Pada zamannya, Copernicus (1473 – 1543) dan Kepler (1571 – 1630) demikian meyakini hukum-hukum astronomi dan mekanika yang diperoleh melalui matematika, sehingga mereka menjungkir-balikkan berbagai hukum astronomi dan mekanika dewasa itu yang diterima dan direstui oleh doktrin agama (gereja), walaupun dengan tindakan ini mereka dipandang sebagai penentang agama.

Di abad XVII Descartes dan Galileo melakukan revolusi atas hakekat

dan kegiatan sains (*nature and scientific activity*). Mereka melakukan seleksi atas konsep-konsep sains yang digunakan, mendefinisikan kembali tujuan kegiatan sains dan mengganti metodologinya.

Descartes (1596-1650) mengumumkan secara eksplisit, bahwa '*the essence of science was mathematics*'. Ia mengakui dan hanya menaruh harapan pada prinsip sains yang terdapat dalam geometri atau dalam matematika abstrak. Ia berpendapat, bahwa hanya dengan ini semua fenomena alam dapat dijelaskan dan beberapa pula dapat didemonstrasikan.

Galileo (1564-1642) meninggalkan falsafah sains yang ketika itu bersifat spekulatif dan mistik, dan mulai memandang alam sebagai mekanika dan matematika. Ia berpendapat bahwa permasalahan sains seharusnya tidak dicampur-baurkan dan jangan pula ditutup-tutupi dengan argumentasi keagamaan. Pernyataan terkenal Galileo yang dibuat pada tahun 1610, dikutip dan berbunyi seperti berikut:

Philosophy [nature] is written in that great book which ever lies before our eyes – I mean the universe – but we cannot understand it if we do not first learn the language and grasp the symbols in which it is written. The book is written in the mathematical language, and the symbols are triangles, circles and other geometrical figure, without whose help it is impossible to comprehend a single word of it; without which one wonders in vain through a dark labyrinth.

Ia meyakini, bahwa alam hanya dapat dijelaskan dan difahami melalui

matematika. Pendapat ini sesuai dengan apa yang terealisasi sekarang, yaitu bahwa berbagai fenomena alam, sebagaimana juga berbagai fenomena lain dapat dijelaskan, dan berbagai permasalahan dapat diselesaikan dengan matematika melalui proses pemodelan matematika (*mathematical modeling*).

III. PEMANFAATAN MATEMATIKA UNTUK BANGSA DAN KEHIDUPAN BERBANGSA

KONTRIBUSI MATEMATIKA.

Adalah cita-cita setiap bangsa untuk mewujudkan kehidupan yang bermartabat dan sejahtera ditengah-tengah masyarakat yang rukun, aman dan damai dalam pergaulan sebangsa dan antara bangsa. Disamping *kesejahteraan fisik* yang terwujud sebagai kehidupan yang berkecukupan, tidak kurang yang menjadi dambaan adalah *kesejahteraan spiritual* dalam wujud kehidupan harmonis yang bermartabat, berbudaya dan beretika dengan menjunjung tinggi nilai-nilai luhur. Semua ini hanya dapat dicapai dengan memanfaatkan apa yang ada dalam alam, serta akal, kearifan dan daya pikir yang dimiliki oleh setiap anggota masyarakat bangsa itu. Dengan akal, kearifan dan daya pikir yang dimiliki, setiap bangsa dapat menciptakan dan mengembangkan usaha untuk memanfaatkan alam, dan usaha ini sekali gus mengembangkan pula akal, kearifan dan daya pikir mereka. Sains, teknologi dan rekayasa yang diciptakan dan dikembangkan dengan akal, kearifan dan daya pikir manusia adalah salah satu yang dihasilkan untuk memanfaatkan alam mewujudkan kesejahteraan fisik mereka. Dengan akal, kearifan dan daya pikir ini pula mereka kembangkan berbagai ilmu pengetahuan lain, budaya, etika dan nilai-nilai luhur, yang dikehendaki tercermin dalam kepribadian setiap manusia, dan mereka ciptakan pula keindahan yang

dapat mereka nikmati, serta silaturahmi, untuk menumbuhkan kenyamanan hidup sebagai perwujudan kesejahteraan spiritual.

Matematika adalah salah satu ilmu pengetahuan yang patut dikembangkan untuk mendukung terwujudnya kesejahteraan fisik ataupun kesejahteraan spiritual tersebut.

MATEMATIKA SEBAGAI PENDUKUNG KESEJAHTERAAN SPIRITUAL.

Jika dilihat kembali ke belakang, tampak bahwa matematika telah semenjak awal terus menerus berkontribusi pada budaya bangsa yang memiliki dan mengembangkannya.

Seni Dalam Matematika.

Disamping pemanfaatannya, kontribusi matematika tercermin pula dalam kearifan dan budaya yang berkembang di tengah kehidupan bangsa itu. Bangsa Yunani klasik yang terkenal dengan alam pikiran yang dipenuhi oleh estetika, moral dan kerasionalan, melihat adanya aspek seni dalam matematika. Mereka memandang keharmonian, kesederhanaan, kejelasan dan keteraturan dalam matematika sebagai penampilan estetika, sehingga mereka juga memandang matematika sebagai seni (*arts*).

Disamping keindahan intrinsik dan penampilan estetikanya, matematika juga mengandung nilai-nilai luhur yang dapat sangat

berperan dalam pembentukan kepribadian terpuji yang mendasari kehidupan bermasyarakat yang harmonis dan bermartabat.

Penalaran Matematika

Penalaran, sikap dan pola kerja dalam bermatematika, serta struktur dan pencapaian yang diperoleh dalam dan oleh matematika dipandang sebagai pencapaian intelektual manusia yang besar.

Penalaran matematika yang terkait sangat erat dengan *logical / deductive reasoning*, sangat besar artinya dalam masyarakat yang menghargai pola berpikir dan perilaku rasional, salah satu ciri kehidupan masyarakat modern. Keterlatihan berpikir tajam dan memecahkan permasalahan (*problem solving*) yang dituntut dalam bermatematika memberikan kontribusi yang sangat berarti dalam pembentukan dan peningkatan kecerdasan dan kemampuan intelektual.

Berpikir kritis yang selalu harus memperhatikan segala sesuatu yang terlihat dan terpikir, dan berpikir konsisten yang tidak memungkinkan adanya kontradiksi, mendukung perkembangan kearifan seseorang. Sementara itu pola kerja yang sistematis dan cermat yang juga dituntut dalam bermatematika merupakan pula pola kerja yang sangat mendukung kesempurnaan pelaksanaan setiap kegiatan.

Struktur Matematika.

Struktur teori matematika yang kokoh dan teratur mengibaratkan

berbagai hal yang patut dipedomani dan diteladani dalam mewujudkan struktur masyarakat yang menuju ke kesempurnaan.

Dalam matematika, tidak akan pernah terdapat pertentangan antara teorema-teorema yang bertolak dari sistem aksioma yang sama,. Masing-masing adalah akibat logis dari teorema-teorema sebelumnya yang juga merupakan akibat logis dari sistem aksioma yang sama. Aksioma itu sendiri adalah suatu kebenaran awal yang ditetapkan dengan kesepakatan bersama.

Undang-Undang Dasar dalam suatu negara dapat diibaratkan sebagai aksioma dalam suatu teori matematika, dan setiap peraturan perundangan dapat pula diibaratkan sebagai teorema-teorema dalam teori matematika yang sama. Bila setiap peraturan perundangan disusun dan dilaksanakan dengan penuh kejujuran, kritis, kreatif dan inovatif, dan selalu merujuk pada Undang-Undang Dasar dan peraturan perundangan yang sudah dibuat sebelumnya, yang diibaratkan sebagai struktur teori matematika yang dibangun dengan penalaran, sikap dan pola kerja dalam bermatematika, dan semuanya bertolak dari aksioma dalam teori tersebut, maka tidak akan terdapat peraturan perundangan yang saling bertentangan, bahkan satu dan lainnya akan saling mendukung. Jika pengembangan dilanjutkan dengan konsisten mengikuti proses yang demikian, maka akan diperoleh suatu struktur masyarakat yang kokoh.

Demikian pula halnya dengan kehidupan masyarakat dalam lingkup yang lebih terbatas, jika dikembangkan dengan penalaran dan sikap

hidup seperti di atas, dan berpegang teguh pada norma kehidupan yang telah disepakati bersama, akan merupakan pula suatu masyarakat dengan struktur yang kokoh. Ini adalah dasar yang kuat untuk mewujudkan kehidupan masyarakat yang sejahtera, mulai dari kehidupan masyarakat dalam lingkup terbatas, sampai dengan kehidupan bernegara dan kehidupan berbangsa.

Suatu contoh lain adalah bahwa dalam matematika dimungkinkan terdapat dua teori yang saling bertentangan, tetapi berkembang dan dikembangkan berdampingan dengan rukun, tanpa saling mencampuri. Ini dimungkinkan, karena kedua teori itu dikembangkan dengan konsisten dan taat pada sistem aksioma masing-masing. Kedua sistem aksioma itu terdiri dari beberapa aksioma-aksioma yang sama, tetapi masing-masing dilengkapi pula dengan aksioma lain yang bertentangan, seperti halnya geometri Euclides dan geometri tak Euclides. Kedua teori ini memperkuat eksistensi matematika dalam masyarakat keilmuan dan masing-masing dapat memberikan kontribusi dan manfaat yang sangat berarti pada pengembangan dan penerapan berbagai teori di bidang pengetahuan lain.

Ini mengibaratkan, bahwa dua kelompok masyarakat dengan adat istiadat atau ideologi yang berbeda, tetapi taat pada Undang-Undang Dasar negara di mana masyarakat itu berada, sepatutnya dapat hidup, berkembang dan dikembangkan berdampingan dan harmonis, tanpa kelompok yang satu mencampuri kelompok yang lain. Ini akan memper-

kokoh kehidupan dan membuat bangsa itu lebih disegani dalam masyarakat antarabangsa. Ini patut diteladani dalam pembinaan kebhinnekaan dalam kehidupan bangsa ini. Masing-masing kelompok tetap dapat berprestasi dan memberi kontribusi yang berarti bagi kehidupan bernegara dan berbangsa.

Berbagai tamsilan lain yang bernilai tinggi dapat ditarik dari struktur dan bagaimana struktur matematika itu dibangun, seperti proses generalisasi, keterkaitan antara konsep dari teori yang berbeda, dan sebagainya.

Semua ini merupakan kontribusi yang dapat diberikan oleh matematika untuk mewujudkan kesejahteraan spiritual, dan hanya dapat diwujudkan melalui pemahaman dan penghayatan matematika dengan baik dan benar oleh setiap anggota masyarakat.

MATEMATIKA SEBAGAI PENDUKUNG KESEJAHTERAAN FISIK.

Dukungan matematika dalam mewujudkan kesejahteraan spiritual yang diuraikan di atas dipandang sebagai *aspek budaya*, dan dukungan matematika dalam mewujudkan kesejahteraan fisik dipandang sebagai *aspek fungsional* matematika dalam kehidupan masyarakat suatu bangsa. Keduanya menunjukkan bagaimana matematika dapat berkontribusi bagi bangsa dan kehidupan berbangsa.

Aspek fungsional ini, yaitu bagaimana matematika berkontribusi

dalam mewujudkan kesejahteraan fisik suatu bangsa sebagaimana telah dikemukakan dalam uraian-uraian terdahulu, terlaksana secara tidak langsung. Kontribusi ini diberikan melalui interaksinya dengan sains, teknologi dan rekayasa yang sudah bertujuan untuk mewujudkan kesejahteraan fisik bangsa secara langsung. Matematika mendukung pengembangan dan penerapan sains, teknologi dan rekayasa dengan konsisten dan berkelanjutan.

Kontribusi matematika melalui pemanfaatannya dalam pengembangan dan penerapan sains, teknologi dan rekayasa yang dilakukan dengan bermatematika, hanya dapat diwujudkan dengan baik, bila matematika dikuasai dengan baik dan benar. Yang dimaksud dengan penguasaan matematika, bukan hanya penguasaan materi, tetapi juga, bahkan yang lebih utama adalah dalam bernalar, bersikap dan menganut pola kerja yang dikehendaki dalam bermatematika. Bernalar, bersikap dan menganut pola kerja matematika ini bukan hanya untuk bermatematika semata, melainkan juga akan sangat bermanfaat dalam berbagai kegiatan dalam sains, teknologi dan rekayasa itu sendiri.

PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN MATEMATIKA DALAM PENDIDIKAN.

Kontribusi matematika pada bangsa dan kehidupan berbangsa sebagaimana diuraikan di atas hanya dapat direalisasikan bila matematika difahami dengan baik dan benar di setiap lapisan masyarakat, serta dihayati dan dikuasi oleh para profesional sehingga mau dan

mampu bermatematika dengan baik dan benar dalam profesi masing-masing. Semua ini hanya dapat diperoleh melalui pendidikan, baik melalui pendidikan umum, maupun pendidikan khusus di setiap jenjang pendidikan, yang mencakup pelajaran matematika dan terselenggara dengan baik dan benar.

Yang dimaksud dengan istilah pendidikan matematika yang akan digunakan selanjutnya bukan hanya pendidikan keahlian matematika, tetapi juga pendidikan atau pembelajaran matematika sebagai bagian dari pendidikan umum dan dalam program pendidikan khusus yang terdapat di jenjang pendidikan manapun juga.

Keberhasilan pendidikan matematika saat ini sangat memerlukan dukungan segenap lapisan masyarakat. Dukungan itu berupa berkembangnya pengertian dan pemahaman yang benar tentang matematika di semua lapisan masyarakat, sesuai dengan kematangan masyarakat itu sendiri. Dengan pengertian dan pemahaman yang benar ini masyarakat tidak lagi memandang matematika sebagai sesuatu yang selalu ingin dihindari setiap ada kesempatan.

Sayangnya pengertian yang menumbuhkan kesadaran bahwa matematika ini bermanfaat untuk dipelajari baru terdapat, di lingkungan masyarakat yang sangat terbatas. Tetapi, langkah yang merupakan akibat dari kesadaran ini sebenarnya sudah berjalan lama dengan dimasukkannya pelajaran matematika dalam kurikulum di setiap jenjang pendidikan. Disayangkan proses pembelajarannya, proses yang sangat

menentukan keberhasilan suatu pendidikan belum lagi sejalan, bahkan kadang-kadang terkesan berjalan dalam arah yang berlawanan.

SUATU PANDANGAN SEDERHANA TENTANG PENDIDIKAN DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA.

Dari tujuan suatu program pendidikan seharusnya terlihat apa yang diharapkan akan dilakukan oleh lulusannya kelak. Dari tujuan pendidikan ini diturunkan bagaimana seharusnya kemampuan dan perilaku para lulusan, sebut saja sebagai profil lulusan, agar tujuan pendidikan ini terealisasi. Profil itu bukan dibentuk dari nol, tetapi dikembangkan dari profil yang sudah dimiliki. Profil awal peserta didik dikembangkan melalui pengalaman pendidikan yang harus mereka tempuh, mempelajari mata pelajaran dengan silabus yang ditetapkan dalam kurikulum. Bagaimana pengalaman itu harus dihadapkan pada mereka, diungkapkan sebagai proses pembelajaran yang akan diterapkan. Kurikulum dan proses pembelajaran ini seharusnya merujuk pada profil lulusan yang diharapkan, dan profil awal peserta didik, yang mencakup latar belakang pengetahuan yang sudah diperoleh, serta sikap dan pola belajar yang mereka miliki. Profil peserta didik ini juga perlu diidentifikasi untuk tiap mata pelajaran, untuk digunakan dalam perencanaan dan pelaksanaan pembelajaran.

Hal yang sama juga berlaku untuk pendidikan matematika, baik untuk masing-masing mata pelajaran, untuk rangkaian mata pelajaran di setiap jenjang pendidikan, ataupun rangkaian mata pelajaran semua

jenjang pendidikan secara keseluruhan. Profil itu harus mencakup *cara bernalar, bersikap dan bekerja matematika, kualitas penguasaan dan kuantitas cakupan materi yang sudah diperoleh*. Kurikulum untuk pelajaran ini, termasuk silabus setiap mata pelajaran harus disesuaikan dengan profil peserta didik yang diharapkan setelah menyelesaikan pelajaran dan profil ketika memulai pelajaran tersebut. Profil awal ini sangat penting untuk menentukan proses pembelajaran yang mencakup antara lain, dari mana pelajaran itu harus dimulai dan bagaimana proses pembelajaran yang harus digunakan, yaitu bagaimana harusnya pelajaran itu disajikan untuk mencapai profil akhir yang ditetapkan.

Sistem pendidikan secara keseluruhan, mulai dari jenjang pendidikan dasar, bahkan semenjak pendidikan anak usia dini, sampai ke jenjang pendidikan tinggi merupakan suatu rangkaian, yang diibaratkan sebagai rangkaian yang terdiri dari beberapa utas rantai jenjang pendidikan yang seharusnya tersambung secara utuh. Sepanjang apa pun rangkaian itu, rantai-rantai yang membangunnya harus tersambung dengan sempurna. Hal yang sama juga berlaku untuk rangkaian pendidikan matematika yang sama sekali tidak boleh terputus, sesuai dengan struktur matematika.

Yang menjadi perhatian berikut, bukanlah mengenai metode dan teknik pembelajaran yang dapat dipilih dari beragam teori pendidikan, melainkan beberapa butir yang perlu diperhatikan untuk penyempurnaan.

Beberapa Permasalahan Utama.

Ada beberapa butir mengenai pelaksanaan pendidikan matematika, yang juga berlaku untuk pendidikan secara umum, yang patut memperoleh perhatian yang sungguh-sungguh dan disadari sesegera mungkin.

- (a) Rantai pendidikan matematika antar jenjang pendidikan dan dalam masing-masing jenjang pendidikan dewasa ini terkesan seperti tersambung semu. Rangkaian itu tampak seperti tersambung, tetapi sebenarnya terdapat celah yang cukup lebar. Maksudnya hampir setiap pelajaran dilaksanakan hanya berdasarkan pada apa yang diungkapkan dalam kurikulum dan silabus, dengan *mengabaikan profil awal peserta didik*. Jarak yang cukup jauh antara materi awal suatu mata kuliah dan profil awal peserta didik tidak memungkinkan peserta didik dapat mencapai kualitas penguasaan materi seperti seharusnya.
- (b) Di setiap kelas hanya sedikit peserta didik, seandainya ada, yang belajar matematika dengan motivasi yang benar. Dengan *mengabaikan motivasi belajar peserta didik*, sukar diharapkan proses pembelajaran yang dilaksanakan adalah proses pembelajaran yang sesuai, sehingga dapat menghasilkan peserta didik dengan profil yang diharapkan, yang mencakup pemahaman materi dengan baik dan benar.
- (c) Dalam pelaksanaan pembelajaran, seringkali pengembangan dan pematapan *cara bernalar, sikap dan cara kerja peserta didik terabaikan*. Bukan hanya *deductive reasoning*, bahkan *reasoning* secara umum pun terabaikan, sehingga sukar pula diharapkan kualitas penguasaan

materi yang semestinya dari peserta didik.

- (d) Pelaksanaan pendidikan seringkali terkesan memberikan *perhatian terhadap kuantitas materi dengan mengabaikan kualitas penguasaannya*. Pada umumnya perhatian diberikan lebih pada kuantitas materi yang harus dicakup, dengan *mengabaikan kualitas penguasaannya*.

Pengajar.

Kunci utama untuk mengatasi segala kelemahan tersebut di atas adalah pengajar. *Penguasaan atas materi yang mencakup pemahaman konsep dan keterampilan dalam metode dan teknik manipulasi matematika, dan terutama kemampuan dan keterbiasaan bernalar, bersikap dan bekerja seperti yang dituntut dalam bermatematika adalah suatu keharusan mutlak bagi pengajar.*

Ini adalah modal utama pengajar, untuk mampu melaksanakan pembelajaran dengan bernalar, bersikap dan bekerja matematika sebagaimana harusnya. Dengan ini diharapkan peserta didik memperoleh penguasaan materi dengan baik dan benar, dan terbiasa pula dengan bernalar, bersikap dan bekerja sebagaimana harusnya dalam bermatematika. Walau bagaimanapun, usaha menumbuhkan dan memelihara motivasi belajar matematika di kalangan semua peserta didiknya harus dilakukan terus menerus.

PENDIDIKAN MATEMATIKA DI UNIVERSITAS.

Semua pengamatan mengenai pelaksanaan pembelajaran mate-

matika yang diutarakan di atas, juga terdapat di jenjang perguruan tinggi.

Pendidikan di perguruan tinggi seharusnya bertujuan untuk membawa mahasiswa sesegera mungkin mencapai frontier ilmu yang dituntutnya, baik dari sudut pandang pengembangan ilmu itu sendiri, maupun dari sudut pandang pemanfaatan ilmu itu dalam profesi yang terkait. Penstrataan pendidikan tinggi memungkinkan dihasilkan tenaga ahli yang sesuai untuk mengemban profesi yang memerlukan dukungan ilmu hanya sampai tingkat tertentu saja dalam waktu yang lebih singkat. Ini juga berlaku untuk pendidikan keahlian matematika dan pendidikan keahlian lain dengan mata pelajaran matematika sebagai penunjang.

Yang menjadi perhatian utama dalam pembahasan berikut adalah pendidikan matematika sebagai mata pelajaran penunjang pendidikan keahlian di berbagai bidang ilmu lain, terutama untuk bidang sains, teknologi dan rekayasa. Ini terkait dengan kontribusi matematika yang tidak secara langsung dalam mewujudkan kesejahteraan fisik dalam masyarakat.

Tujuan Pendidikan Matematika.

Kemajuan ilmu pengetahuan yang pesat dalam setiap bidang keprofesian diperkirakan akan makin pesat di masa mendatang. Sampai saat ini makin banyak ilmu pengetahuan yang harus terlibat dalam pelaksanaan kegiatan suatu bidang profesi. Bahkan, ada diantara ilmu

pengetahuan yang selama ini tidak pernah terkait dengan suatu profesi, sekarang harus membaur sebagai gugus ilmu yang mendasari bidang profesi tersebut.

Tidak terkecuali dalam hal ini keterlibatan matematika. Dewasa ini makin banyak perkembangan ilmu pengetahuan yang memerlukan keterlibatan matematika, termasuk pemanfaatan perkembangan matematika yang mutakhir. Akan menjadi hal yang biasa bila seorang pengguna matematika harus mempelajari sendiri matematika yang belum pernah dipelajarinya, agar dapat memahami dan menggunakan perkembangan baru ilmu keprofesiannya. Bahkan, bukan tidak mungkin pada suatu ketika ia harus mengembangkan sendiri matematika yang diperlukannya.

Untuk menghadapi situasi ini perlu peninjauan kembali tujuan pelajaran matematika dalam kurikulum berbagai program studi di perguruan tinggi. Peranan pelajaran matematika dalam suatu program studi hendaknya tidak lagi terbatas hanya sebagai pendukung keberhasilan mahasiswa menguasai bidang ilmu atau bidang profesi yang mereka tuntut. Sudah waktunya pelajaran matematika untuk suatu program studi juga ditujukan untuk *mempersiapkan para lulusan agar kelak mampu mengembangkan sendiri pengetahuan matematika mereka sewaktu-waktu diperlukan dalam menjalankan profesi masing-masing.*

Proses Pembelajaran.

Peninjauan kembali tujuan pendidikan matematika ini perlu disertai dengan menetapkan kembali arti kelulusan setiap pelajaran matematika, yang melibatkan profil lulusan dalam bidang matematika. Kelulusan itu sepatutnya merupakan kepercayaan bahwa para lulusan akan *mampu mengembangkan pengetahuan matematika* mereka selanjutnya, mungkin dalam rangka mengikuti pendidikan lanjut, ataupun dalam rangka menjalankan profesi yang mereka emban. Ini berarti pengkajian kembali proses pembelajaran, termasuk proses evaluasi yang harus diterapkan.

Proses pembelajaran harus mulai memberikan *penekanan pada kemampuan bernalar, bersikap dan bekerja seperti yang dituntut dalam bermatematika*. Proses pembelajaran bukan lagi ditujukan hanya untuk memperoleh penguasaan materi dengan baik dan benar semata, melainkan juga melatih dan membiasakan mahasiswa dengan proses bermatematika. Ini adalah bekal yang akan mendasari kemampuan untuk mengembangkan sendiri pengetahuan matematika. Untuk melaksanakan ini penting sekali ditumbuhkan motivasi serta pengertian dan pemahaman mahasiswa yang benar tentang matematika. Pelaksanaan pembelajaran yang disesuaikan dengan profil awal mahasiswa akan sangat membantu mencapai keberhasilan.

Konsep Fundamental Dan Strategis, Serta Belajar Mandiri.

Untuk menutup perbedaan yang besar antara profil awal mahasiswa

dan materi awal kuliah yang terdapat dalam silabus, sering diperlukan waktu yang melebihi waktu yang disediakan dalam kurikulum. Seandainya ini terjadi, maka pilihan perlu dijatuhkan pada pengurangan cakupan materi, dengan mengutamakan materi yang merupakan *konsep yang fundamental dan strategis*, yaitu yang merupakan dasar untuk mempelajari materi selanjutnya. Ini harus disertai dengan *pembelajaran yang membimbing mahasiswa ke arah belajar mandiri* yang memberi kemampuan mahasiswa mempelajari sendiri topik-topik yang ditinggalkan itu. Ini juga merupakan langkah yang mengawali peningkatan kemampuan mempelajari matematika selanjutnya.

Dengan ringkas dapat disimpulkan bahwa proses pembelajaran matematika di perguruan tinggi harus dapat menumbuhkan motivasi yang kuat, serta meningkatkan kemampuan mempelajari matematika, termasuk kemampuan belajar mandiri, yang sesuai dengan hakekat matematika.

Dalam segala hal komunikasi dan diskusi yang penuh keterbukaan perlu dibina dan dilestarikan secara berkelanjutan antara pakar program studi yang terkait dengan pakar matematika.

MATEMATIKA DI PENDIDIKAN PRA-UNIVERSITAS.

Sebagaimana telah diungkapkan, pendidikan matematika mulai dari tingkat dasar sampai dengan tingkat perguruan tinggi merupakan satu rangkaian yang seharusnya tersambung dengan sempurna. Namun,

kenyataannya tidak sepenuhnya demikian. Kecuali hanya dalam beberapa kasus, antara pendidikan matematika universitas dan pra universitas terdapat kesenjangan yang cukup besar, sehingga pendidikan matematika universitas tidak dapat langsung dimulai dan dilaksanakan sesuai dengan yang seharusnya, baik dalam materi maupun proses pembelajarannya. Kesenjangan yang lebih berat adalah yang diakibatkan oleh pandangan terhadap matematika yang tidak wajar oleh mahasiswa baru. Dengan pandangan ini, banyak mahasiswa yang mengabaikan kemampuan bernalar, serta sikap dan pola kerja yang seharusnya dalam bermatematika. Kemampuan dalam *reasoning*, apalagi *logical reasoning*, di kalangan mereka sangat tipis. Secara ekstrim dapat dikatakan bahwa para lulusan sekolah menengah terkesan pada umumnya hanya menghafalkan berbagai materi matematika tanpa peduli apa yang dihafalkan.

Keadaan ini sangat menyulitkan pendidikan matematika di universitas. Tanggung jawab universitas untuk membawa mahasiswa ke frontier ilmu dalam waktu yang ditentukan, sangat berat dilaksanakan untuk mahasiswa yang memulai pendidikan universitasnya dengan latar belakang yang lemah hampir dalam semua segi.

Disayangkan, banyak perguruan tinggi yang memilih jalan keluar dengan hanya melaksanakan perkuliahan matematika dengan seadanya, tidak sesuai dengan kaedah-kaedah dan hakekat matematika. Dua kemungkinan alternatif yang dapat disarankan untuk mengatasi permasalahan ini adalah memberlakukan tanggap darurat pada

pendidikan di perguruan tinggi, atau segera mengembalikan pendidikan matematika pra-universitas ke pelaksanaan yang wajar. Pilihan seharusnya dijatuhkan pada alternatif kedua, karena dengan pilihan ini mafaatnya akan dirasakan untuk masa depan selanjutnya.

Untuk melaksanakan alternatif kedua ini, ada beberapa hal yang perlu memperoleh perhatian utama, diantaranya juga seperti yang dikemukakan diatas, yaitu *guru, perumusan kembali tujuan pendidikan dan sasaran setiap mata pelajaran matematika, proses pembelajaran, dan kebijakan mengenai pelaksanaan pendidikan.*

Guru.

Guru yang menguasai materi dengan kualitas penguasaan yang baik dengan kuantitas materi yang cukup, adalah suatu keharusan untuk melaksanakan pendidikan yang baik. Seorang guru matematika harus *menguasai dengan baik dan benar, seluruh materi pelajaran matematika yang diajarkan di jenjang pendidikan yang dihadapinya.* Memiliki wawasan yang lebih luas dalam dan di luar matematika akan sangat membantu.

Tujuan Pendidikan Matematika.

Tujuan pendidikan matematika di setiap jenjang pendidikan harus dirumuskan kembali dengan jelas, agar terdapat kesinambungan yang wajar dan kokoh dengan pendidikan dijenjang sebelum dan sesudahnya, sehingga terwujud rangkaian pendidikan yang tersambung sempurna.

Demikian pula halnya antara mata pelajaran matematika. Rumusan tujuan pendidikan dan tujuan setiap pelajaran hendaknya dalam ungkapan yang praktis dan dalam ungkapan yang mudah difahami, misalnya dengan menguraikan profil siswa yang diinginkan setelah mengikuti setiap mata pelajaran.

Pembelajaran.

Pembelajaran harus dimulai dengan mengenali profil awal siswa untuk menjamin kesinambungan materi pelajaran, yang selama ini tampak sering terabaikan. Dengan penguasaan materi dan wawasan seperti yang seharusnya, serta keluasan wawasan dalam dan luar matematika, memungkinkan seorang guru berimprovisasi dalam mengajar sehingga sasaran setiap mata pelajaran tercapai dengan baik.

Kebijakan Umum Pelaksanaan Pendidikan.

Kebijakan umum dalam pelaksanaan ujian-ujian sebagai proses evaluasi keberhasilan siswa, merupakan salah satu butir yang penting. Pelaksanaan ujian yang membolehkan menggunakan pilihan ganda untuk semua mata pelajaran, perlu dikaji ulang, terutama untuk matematika. Dengan ujian pilihan ganda kemampuan bernalar siswa dalam bermatematika terabaikan, sehingga para pembelajar tidak merasakan bahwa ini penting. Didorong oleh tuntutan masyarakat atas kelulusan yang tinggi di setiap sekolah banyak guru yang memusatkan pelajarannya

pada cara-cara "memilih" jawaban yang benar, bukan pada cara "memperoleh" jawaban yang benar, dan mengabaikan penalaran matematika.

Beberapa Catatan.

Pelaksanaan perubahan sistem pembelajaran ataupun materi pelajaran yang agak drastis hendaklah dilakukan tidak terlalu terburu-buru dan tidak secara massal. Mempersiapkan guru adalah hal utama yang harus dilakukan, dan ini memerlukan waktu yang tidak sedikit, karena setiap guru yang akan melaksanakan harus benar-benar menguasai materi dengan baik dan benar.

Peringatan dapat ditarik dari pengalaman melaksanakan New Math di awal tahun 1970an yang lalu. Latar belakang guru matematika kita ketika itu belum cukup untuk menerima New Math yang sangat mendambakan *logical reasoning*, sehingga penguasaan mereka atas materi ajar boleh dikatakan kacau. Sebagai hasilnya, kita lihat bagaimana dampaknya pada pendidikan matematika kita dewasa ini. Di luar negeri pun, termasuk di Amerika Serikat juga terjadi hal yang hampir sama. Sampai sekarang banyak perubahan cara atau konsep pendidikan yang dilaksanakan langsung menyeluruh, terkesan tidak dengan persiapan yang cukup matang.

Ditinjau dari sudut peningkatan kualitas guru, kegiatan meningkatkan kemampuan secara teratur dan terus menerus, dipandang lebih

efektif dari pada keharusan mengikuti pendidikan formal untuk suatu gelar.

Dewasa ini sedang berjalan penggunaan cara mengajar matematika yang baru, yang dikenal sebagai PMRI. Metode ini benar-benar mengajak dan membawa para siswa belajar dengan berbuat, mengamati, mencoba, sampai dengan menarik kesimpulan yang sama dengan apa yang dikehendaki untuk difahami siswa, bukan dengan menyuapkannya.

Yang sangat menarik dalam pelaksanaan program ini adalah pelaksanaan yang bertahap, yang dimulai hanya di beberapa sekolah saja, dan mulai dari kelas I sekolah dasar. Para guru diajak terlibat aktif mengembangkan cara yang sesuai dengan keadaan siswa mereka, bukan hanya melaksanakan apa yang sudah ditetapkan.

Dengan cara ini, jika ada kekeliruan dampaknya tidak akan menjalar luas, dan segera dapat dibenahi. Disamping itu, guru diberi masukan secara teratur dan mengembangkan masukan itu secara terus menerus, yang berarti membiasakan guru mengembangkan diri secara kontinu selangkah demi selangkah. Ini menimbulkan kemantapan penguasaan, yang mengakibatkan pelaksanaan yang baik.

Awal pelaksanaan dan pengembangan kegiatan ke kelas yang lebih tinggi dilakukan dengan terlebih dahulu mempersiapkan guru dan merencanakan pelaksanaan.

PENUTUP

KESIMPULAN

Dari uraian-uraian di atas, dapat ditarik berbagai kesimpulan, antara lain sebagai berikut ini:

Matematika sebagai ungkapan pemikiran manusia sejalan untuk setiap manusia dimanapun bangsa itu berada, semenjak awal matematika dikenal. Oleh karena, itu matematika adalah ilmu pengetahuan yang universal, yang sepatutnya dapat diterima, dipelajari dan difahami oleh setiap bangsa.

Matematika bukanlah ilmu pengetahuan yang mengawan tinggi, melainkan ilmu pengetahuan yang membumi, terkait erat dengan situasi nyata, keterkaitan yang saling memberi dan menerima manfaat, bahkan bagi kehidupan manusia.

Dari penalaran, sikap dan pola kerja matematika dan dari teori matematika yang dihasilkannya, yang keduanya tidak dapat dipisahkan, dapat ditarik kontribusi yang sangat berarti bagi bangsa dan kehidupan berbangsa. Kecerdasan, kearifan dan nilai-nilai luhur yang dapat ditumbuh-kembangkan melalui belajar dan bermatematika, dan peranan besar teori matematika dalam pengembangan dan penerapan sains, teknologi dan ilmu rekayasa merupakan kontribusi penting yang dapat disumbangkan matematika, untuk mewujudkan kesejahteraan bangsa, spiritual dan fisik, walau tidak secara langsung.

Kunci semua ini adalah pemahaman dan penguasaan matematika yang baik dan benar di semua lapisan masyarakat sosial, sesuai dengan tingkat kematangan masyarakat itu, dan dalam masyarakat profesi, yang hanya dapat diperoleh melalui pendidikan.

Pendidikan, termasuk pendidikan matematika, yang merupakan suatu rangkaian rantai-rantai pendidikan semua jenjang pendidikan, seharusnya tersambung dengan sempurna, tetapi dewasa ini terlihat hanya tersambung semu. Demikian juga halnya dengan rantai pendidikan di setiap jenjang pendidikan, terlihat adanya mata rantai yang hilang atau tidak layak pakai. Keadaan ini harus diatasi segera dengan mengembalikan rangkaian, masing-masing rantai dan setiap mata rantai ke keadaan sebagaimana mestinya.

Beberapa diantara butir yang dipandang sebagai simpul strategis yang perlu ditangani segera dalam pendidikan matematika, adalah sebagai berikut:

(a) *Tenaga pengajar* yang harus mempunyai pemahaman dan penguasaan matematika, serta keterampilan bermatematika dengan baik dan benar, baik kualitas penguasaan, maupun kuantitas materi yang sesuai.

Khusus untuk pendidikan pra universitas dan tahun-tahun pertama pendidikan universitas, setiap pengajar matematika harus menguasai seluruh mata pelajaran matematika yang diajarkan di jenjang pendidikan yang bersangkutan.

(b) *Peninjauan kembali tujuan pendidikan dan tujuan pembelajaran matematika* seluruh rangkaian jenjang pendidikan, di setiap jenjang pendidikan, sampai dengan setiap mata pelajaran, dan dirumuskan ulang dengan ungkapan yang lebih praktis, sehingga mudah terlihat kesinambungannya dan dapat dipedomani dalam pelaksanaan pendidikan dan pembelajaran.

Khusus untuk jenjang pendidikan tinggi, pendidikan dan pembelajaran matematik seharusnya juga ditujukan untuk mempersiapkan kemampuan mahasiswa untuk mengembangkan pengetahuan matematika mereka secara mandiri, baik selama pendidikan ataupun setelah memasuki profesi yang dipilihnya.

(c) *Proses pembelajaran* yang harus selalu merujuk pada profil awal pembelajar dan tujuan pendidikan untuk setiap tahap pendidikan dan setiap pelajaran, yang secara terus menerus meningkatkan motivasi pembelajar, mengutamakan kualitas dari pada kuantitas, dan sesuai dengan hakekat matematika. Tercakup dalam proses pembelajaran ini cara melakukan evaluasi atau penilaian setiap mata pelajaran dan setiap jenjang pendidikan yang harus sesuai dengan tujuan pelajaran/pendidikannya.

KATA PENUTUP.

Pertama-tama alhamdulillah, kita telah dimungkinkan oleh Allah subhanahu wa taala bersama-sama berada di majelis terhormat ini.

Lebih khusus, rasa syukur yang sedalam-dalamnya saya panjatkan dari lubuk hati yang dalam ke hadirat Allah yang maha pengasih, penyayang dan pemurah, atas rahmatNya yang telah memungkinkan saya mengalami kehidupan dengan selamat sampai mengalami peristiwa yang mulia ini.

Izinkan saya terlebih dahulu menyampaikan terima kasih yang setinggi-tingginya kepada Institut Teknologi Bandung atas penghargaan yang telah diberikan sebagai Guru Besar Emeritus Institut Teknologi Bandung, yang saya rasakan sangat terhormat dan mulia, yang membawa saya sekarang berdiri di mimbar dihadapan majelis terhormat ini.

Peristiwa ini tidak akan mungkin terjadi, tanpa dukungan rekan-rekan, masyarakat matematika ITB, dan umumnya FMIPA, serta teman-teman lainnya di ITB. Namun, yang terutama memungkinkan saya seperti sekarang ini adalah semua guru saya semenjak sebelum menjejakkan kaki diperguruan tinggi, sampai dengan para dosen selama di FIPIA-UI, FMIPA-ITB dan Courant Institute of Mathematical Science di New York Univerisity.

Almarhum profesor Moedomo adalah seorang yang sangat berpengaruh pada pengembangan karier saya di ITB dan di luar ITB. Bukan hanya bimbingan dan pelajaran yang telah saya terima, tetapi yang saya rasakan lebih berkesan adalah bebagai tantangan yang beliau berikan, yang disertai dengan bimbingan yang berupa apa yang harus diperhatikan dalam menghadapinya, bukan cara menghadapinya. Terima

kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya saya sampaikan melalui bu Moedomo dan keluarga yang ditinggalkan. Terima kasih! Semoga Allah subhanahu wa taala memberikan kelapangan bagi almarhum di alam baka. Demikian pula terima kasih pada para dosen dan senior saya selama di ITB, antara lain almarhum drs. Rawuh dan drs. Bachtiar Sjarif, untuk tidak menyebutkan semuanya satu persatu.

Professor James.J. Stoker (alm), professor Arthur Peters, professor Eleazer Bromberg dan professor Cathleen S. Morawetz, adalah pembimbing disertasi saya di Courant Institute of Mathematical Sciences, penasihat akademik selama di New York University dan dosen yang sangat banyak memberi teladan dan perhatian selama saya belajar di luar negeri. Terima kasih dan penghargaan saya yang setingg-tingginya pada mereka.

Tidak dapat saya lupakan almarhum professor Isjrin Noerdin yang menumbuhkan keinginan saya belajar Matematika di ITB ini. Dorongan beliau didukung pula oleh direktur SMA Negeri Padang ketika itu, almarhum Sutan Kumala Pontas Nasution dengan mengatakan: "..... *Fipia???**Itu sekolah gila!?!?..... Tapi, baguuuus!!!!*". Terima kasih pada keduanya.

Kepada almarhum ayahanda dan bunda saya merasa sangat berhutang budi, bukan hanya atas segala yang telah mereka berikan sepanjang hayat mereka, tetapi juga kerelaan mereka memberi kesempatan pada saya menempuh pendidikan yang ketika itu belum

memperlihatkan masa depan yang jelas, apalagi masa depan yang cerah di Indonesia ini. Hanya terima kasih yang saat ini dapat saya ucapkan, diiringi doa, semoga keampunan dan kebahagiaan senantiasa dilimpahkan Allah pada mereka di alam baka.

Wirda, isteri tercinta, beserta anak-anak, menantu dan cucu-cucu telah selalu mendampingi dengan penuh kesetiaan, ketulusan dan kesabaran, dan terus menerus memberi dorongan dan rasa tenang dan bahagia, walaupun ketika itu dosen, terutama dosen matematika, bukanlah profesi cerah yang diinginkan semua orang. Dengan semua inilah saya mampu berkhidmat dengan tekun, memberikan apa yang dapat saya berikan pada ITB, dan menepis berbagai godaan untuk meninggalkannya. Hanya terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya yang dapat saya sampaikan saat ini.

Demikianlah, saya akhiri uraian ini dengan ucapan terima kasih atas kehadiran bapak, ibu, saudara dan undangan sekalian, serta segala perhatian dan kesabaran yang telah diberikan. Semoga ada yang dapat dimanfaatkan.

Wassalamu alaikum wa rahmatullahi wa barakatuh!

RUJUKAN:

1. Calinger, Ronald: *A Contextual History of Mathematics*, Prentice Hall, 1999.
2. Kline, Morris: *Mathematical Thought, From ancient to Modern Times*, 3 vols, paperback issue, Oxford University Press, 1990.
3. Hersh, Reuben: *“What is Mathematics, Really?”*, Jonathan Cape London, 1997.
4. Courant, R., Robbins, H: *“What is mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods, “ 2nd ed., Oxford University Press, 1996.*
5. Reid, Constance: *“Courant, in Gottingen and New York. The Story of Improbable Mathematician”*, Springer-Verlag, 1976.
6. Nagel, Ernest: *“The Structure of Science”*, London & Henley & Routledge & Kegan Paul, 1979.
7. Gelfand, .M., Shilov, G.E. (translated by Eugene Saletan): *“Generalized Functions”*, vol. I. Academic Press, 1964.
8. Anglin, W.S. : *“Mathematics: A Concise History and Philosophy”*, Springer –Verlag, 1994.
9. Bell, E.T. : *“Mathematics, Queen and Servant of Science”*, McGraw-Hill, 1951.
10. Feibelman, J.: *“Pure Science, Applied Science, Technology, Engineering: An Attempt at Definitions”*.
11. Bass, Hyman: *“Mathematics, Mathematicians, and Mathematics*

Educations", *Bulletin (New Series)* of the AMS, vol. 42, no. 4 (417-430).

12. Almeida, D., Ernest, P.: *Editorial: Teaching and the Nature of Mathematics.* "Philosophy of Mathematics Education Newsletter 9.
13. - : *"The Nature of Mathematics" in Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Educations.* National Academy of Sciences, 1989.

CURRICULUM VITAE



Nama : **Muhammad Ansjar**
Tempat & tgl. lahir : 28 Agustus 1934
di Bukittinggi.
Agama : Islam

PENDIDIKAN:

- Ph.D. - Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University (1966).
- M.Sc. - Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University (1964).
- Sarjana, Institut Teknologi Bandung.(1960)

PENGALAMAN KERJA DI ITB:

Fungsional:

- Guru Besar Emiritus ITB (2008 -)
- Asisten dan Dosen Institut Teknologi Bandung (1958 – 2004)
- Membimbing, anggota tim pembimbing dan penguji pogram doktor bidang matematika dan engineering di ITB, UGM dan TU Delft.

Keilmuan:

- Metode Elemen Hingga, Mekania Fluida, Kontrol Optimum

Struktural:

- Kepala dan pendiri Pusat Penelitian Pengembangan dan Penerapan Matematika (P4M) (1994 – 1999)
- Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) - ITB. (1988 – 1994)
- Pembantu Dekan III Fakultas Pasca Sarjana. (1985 -1988)
- Pengelola Program S2, Sekolah Pasca Sarjana (1979 – 1985).
- Pembantu Dekan I, Departemen Ilmu Pasti dan Ilmu Alam (DIPIA) (1968 – 1969)
- Ketua Jurusan Matematika (1967 – 1968)

Normatif:

- Anggota Senat Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dan Anggota Senat/ Senat Akademik ITB (1988 – 2004), Ketua Komisi I (bidang Akademik), (2002 – 2004)

Penugasan ITB diluar kampus:

- Dosen di Universiti Kebangsaan Malaysia (1970 – 1974)
- Mewakili ITB di progam EIUDP dilanjutkan dengan Forum Kerjasama10 Universitas (1993 – 2005)
- Anggota University Basic Science Team, World Bank IX untuk Direktorat Jendral Pendidikan Tinggi (1994 – 1997)

PENGALAMAN KERJA LAINNYA:**- Konsultasi.**

- Development of Madrasah Aliyah Project (DMAP), ADB Loan (200)
- Higher Education Project (HEP) ADB Loan for ITS (International Academic Advisor) (1997 – 1999)
- USAIDS –JICA, (1994 – 1998)
- Berbagai konsultasi dan lokakarya dalam rangka peningkatan pengetahuan dosen dan guru (1990 -)

- Dosen Luar Biasa:

- Universitas Islam Bandung (UNISBA) 2004 - ...
- Universitas Katolik Parahyangan (UNPAR)1986 - ...
- **Juri Lomba Penelitian Ilmiah Remaja (LPIR)**, (Direktorat Pendidikan Menengah Umum) (1987 -).

- Anggota Komisi Istilah:

- Pusat Pengembangan Bahasa Indonesia 1976 –1987),
- Fakulti Sains, Universiti Kebangsaan Malaysia dan Dewan Bahasa dan Pustaka Malaysia, (1970 – 1974)
- Anggota delegasi Indonesia ke Majelis Bahasa Brunei Darussalam, Indonesia, Malaysia (MABBIM)

Organisasi Keilmuan:

- Pendiri dan Ketua Pertama (1976- 1981).

- Anggota Himpunan Matematika Indonesia (IndoMS)
(1976 - ..)
- Anggota Southeast Asia Mathematical Society (1973 – 2000)
- Anggota American Mathematical Society (1962 – 1966)

Tanda penghargaan:

1. Satyalancana Karya Satya XXX tahun Republik Indonesia
2. Ganesa Bakti Cendekia Satya ITB
3. Anugerah Sewaka Winayaroha, Dirjen DIKTI
4. Piagam Penghargaan serta Lencana Pengabdian 25 tahun ITB