Majelis Guru Besar
Institut Teknologi Bandung

Majelis Guru Besar
Institut Teknologi Bandung

Pidato Ilmiah Guru Besar
Institut Teknologi Bandung

Profesor Pudji Astuti Waluyo

SUBRUANG *INVARIANT*: KONTRIBUSI DAN PERLUASANNYA

22 Juli 2011
Balai Pertemuan Ilmiah ITB

Pidato Ilmiah Guru Besar
Institut Teknologi Bandung

22 Juli 2011

Profesor Pudji Astuti Waluyo

SUBRUANG *INVARIANT*:
KONTRIBUSI DAN PERLUASANNYA

Majelis Guru Besar
Institut Teknologi Bandung

Judul: SUBRUANG *INVARIANT*: KONTRIBUSI DAN PERLUASANNYA
Disampaikan pada sidang terbuka Majelis Guru Besar ITB,
tanggal 22 Juli 2011.

Data katalog dalam terbitan

Pudji Astuti Waluyo
SUBRUANG INVARIANT: KONTRIBUSI DAN PERLUASANNYA
Disunting oleh Pudji Astuti Waluyo

Bandung: Majelis Guru Besar ITB, 2011
vi+34 h., 17,5 x 25 cm
ISBN 978-602-8468-41-1
1. Matematika: Aljabar 1. Pudji Astuti Waluyo

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi robbil'alamiin, segala puji penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, atas segala ijin, rahmat dan karuniaNya, naskah pidato ilmiah dengan judul **SUBRUANG *INVARIANT*: KONTRIBUSI DAN PERLUASANNYA** dapat penulis selesaikan. Terima kasih penulis sampaikan kepada pimpinan dan anggota Majelis Guru Besar Institut Teknologi Bandung atas kesempatan yang diberikan kepada penulis untuk menyampaikan pidato ilmiah di hadapan sidang Majelis Guru Besar Institut Teknologi Bandung yang terhormat sebagai bentuk pertanggungjawaban akademik atas amanah guru besar yang penulis terima.

Subruang *invariant* merupakan salah satu topik di bidang aljabar linier yang mendapat cukup banyak perhatian peneliti untuk dikembangkan karena aplikasinya yang luas, baik dalam bidang aljabar linier sendiri, analisis, geometri maupun sistem kontrol linier. Dalam pidato ilmiah ini, disampaikan tiga pengembangan yang telah penulis lakukan bersama kolega dan mahasiswa terkait dengan subruang *invariant* dan generalisasinya, yaitu

1. Pengkajian tiga tipe subruang *invariant*: subruang *marked*, subruang *hyperinvariant*, dan subruang karakteristik.
2. Pengkajian matriks perbandingan berpasangan yang mempunyai peranan penting pada suatu metode pengambilan keputusan

majemuk yang diberi nama *analytical hierarchy process* (AHP).

3. Pengembangan dan generalisasi subruang *invariant* ke modul.

Semoga tulisan ini akan memberikan manfaat bagi pembaca dan menjadi bagian ibadah penulis dalam mengabdi kepada Allah SWT, amien.

Bandung, 22 Juli 2011

Pudji Astuti Waluyo

DAFTAR ISI

SUBRUANG *INVARIANT*:
KONTRIBUSI DAN PERLUASANNYA

1. PENDAHULUAN

Pertama-tama saya ucapkan terima kasih atas kesempatan yang diberikan kepada saya untuk menyampaikan pidato ilmiah pada sidang yang terhormat ini. Kesempatan ini saya manfaatkan untuk menyampaikan hasil-hasil penelitian terkait dengan topik subruang *invariant* yang saya tekuni bersama kolega dan mahasiswa pada belasan tahun terakhir ini. Konsep subruang *invariant* merupakan penyatuan dua konsep dasar dalam matematika; subruang dan *invariant*.

Invariant yang berarti tidak berubah atau tetap, dalam matematika merupakan konsep yang menyatakan tentang sifat objek matematika. Teori *invariant* mulai dikembangkan pada tahun 1840an dalam dua konteks yang berbeda, dalam karya Boole tentang transformasi linier dari polinom homogen dan dalam karya Hesse tentang kajian titik kritis pada kurva bidang berorde-3 yang dikaitkan dengan determinant matriks Hessian [16]. Sekarang ini, konsep *invariant* kita dapati di hampir semua bidang matematika. Sebagai contoh kita dapati kajian tentang persamaan diferensial biasa yang *invariant* terhadap waktu, sistem kontrol linier yang *invariant* terhadap waktu, *invariant manifold* dan subruang yang *invariant* terhadap suatu operator linier disingkat subruang *invariant*. Karena aplikasinya yang sangat luas, topik subruang *invariant* telah dikaji dan dikembangkan di berbagai bidang matematika seperti aljabar linier, analisis, dan geometri. Adapun perjalanan penjelajahan saya di dunia subruang *invariant* melalui rute aljabar linier.

Aljabar adalah salah satu cabang matematika yang biasanya dikaitkan dengan berbagai ide dan teknik matematika terkait dengan aritmatika dan manipulasi formal objek matematika. Pada abad 18 dan 19, penelitian di bidang aljabar utamanya tentang teori persamaan polinom dan teori bentuk polinom *(polynomial forms)* termasuk konsep *invariant* aljabar *(algebraic invariant)*. Pada akhir abad 19 dan awal abad 20, perkembangan penelitian di bidang aljabar mengalami perubahan fundamendal dengan mulai terkristalisasi pandangan baru aljabar modern atau abstrak yang bekerja secara aksiomatik dan struktural [17]. Aljabar linier yang berkembang sampai saat ini dapat dimasukkan dalam kelompok aljabar modern.

Aljabar modern mengkaji struktur objek-objek yang dikaji dan dikembangkan di berbagai bidang matematika. Objek-objek matematika tersebut biasanya kita namakan sistem matematika. Perumpamaan bebas yang sering saya gunakan atau sampaikan, misalnya pada saat berdiskusi dengan mahasiswa, adalah bahwa di dalam aljabar modern kita mempelajari 'anatomi' dan 'fisiologi' sistem matematika. Dalam aljabar modern kita mengkaji komponen apa saja yang menyusun suatu 'species' sistem matematika seperti grup, gelanggang, ruang vektor, modul dan

lain-lain; mempelajari bagaimana peran dan fungsi dari unsur-unsur tersebut dalam sistem yang dikaji, serta melakukan perbandingan antar sistem matematika. Karena itu, dan karena objek-objek yang dikaji di dalam aljabar modern adalah objek matematika yang dikaji di berbagai bidang matematika, tidaklah mengherankan jika teori dan hasil-hasil yang dikembangkan di dalam aljabar modern, termasuk aljabar linier, banyak melandasi dan memberikan manfaat yang luas pada perkembangan berbagai bidang matematika.

Melihat pemanfaatan aljabar linier, suatu hal yang wajar pula bahwa kemunculan dan perkembangan konsep dasar yang membangun aljabar linier sekarang ini, seperti konsep sistem persamaan linier, determinant, bebas linier, basis dan dimensi, kita dapati di berbagai bidang matematika. Konsep-konsep tersebut bahkan telah berkembang pada abad 18 dan 19 dalam bentuk yang terkait dengan keperluannya waktu itu, mendahului kelahiran konsep ruang vektor [32].

Ruang vektor, menyambung perumpamaan bebas di atas, adalah salah satu 'species' yang dikembangan di dunia aljabar modern. Ruang vektor merupakan sistem matematika yang menjadi kerangka kerja dan melandasi bangunan aljabar linier. Ruang vektor baru diperkenalkan pertama kali secara aksiomatik oleh Peano pada tahun 1888 jauh sesudah berbagai konsep dasar dalam aljabar linier seperti determinant dan bebas linier dimunculkan. Lebih dari itu, pengkajian yang intensif tentang ruang vektor juga baru dimulai tahun 1918 ketika konsep ruang vektor riil berdimensi hingga diperkenalkan secara terpisah oleh Weyl [32]. Karena itu, jika kita pelajari sejarah aljabar linier, urutan kelahiran sejumlah konsep yang ada dalam aljabar linier adalah kebalikan dari urutan konsep-konsep yang kita dapati di buku-buku aljabar linier sekarang dan yang kita ajarkan.

Subruang *invariant* adalah suatu bagian dari suatu ruang vektor yang mempunyai struktur dan sifat tertentu terkait dengan suatu operator linier. Operator linier sendiri adalah suatu cara membandingkan atau mengaitkan dua buah ruang vektor yang mengawetkan struktur di kedua ruang vektor yang dibandingkan tersebut. Struktur subruang *invariant* yang telah banyak dikaji dan dikembangkan oleh para peneliti dapat membantu memecahkan permasalahan yang terkait dengan ruang vektor dan operator linier. Metode pemecahan masalah dengan memanfaatkan konsep dan struktur subruang *invariant* disebut metode atau pendekatan subruang *invariant* atau sering disebut juga pendekatan secara geometri. Metode subruang *invariant* banyak dimanfaatkan di berbagai bidang, antara lain di bidang aljabar sendiri, bidang analisis, bidang sistem kontrol dan lain-lain.

Prinsip dasar pada pendekatan subruang *invariant* sangat sederhana dan natural, yaitu memanfaatkan struktur subruang *invariant* untuk membantu memecah permasalahan yang kompleks dan sukar ditangani menjadi sejumlah subpermasalahan yang kecil-kecil dan diharapkan menjadi lebih sederhana sehingga dapat diselesaikan. Sebagai ilustrasi

perhatikan contoh sederhana operator linier pada ruang vektor R^3 berikut:

$$\begin{array}{rccc} T_A: & \mathrm{R}^3 & \longrightarrow & \mathrm{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \end{array}$$

Operator linier T_A memetakan atau mengaitkan atau beraksi pada vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dengan mengalikannya dengan matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ menjadi vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Aksi operator T_A tidak terlalu sederhana. Setiap komponen dari vektor $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, sebagai hasil aksi operator T_A pada vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, bergantung pada semua komponen vektor v.

Hal yang menguntungkan adalah operator T_A memecah atau mendekomposisi ruang R^3 menjadi tiga buah subruang berdimensi satu yang istimewa. Subruang pertama adalah V_1 yang berisi semua vektor kelipatan dari vektor $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Semua vektor di V_1 dipetakan oleh T_A pada dirinya sendiri, artinya tetap ke dalam V_1.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Subruang kedua adalah V_2 yang berisi semua kelipatan vektor $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Semua vektor di V_2 dipetakan oleh T_A menjadi dua kalinya, artinya tetap ke dalam V_2.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Subruang lainnya adalah V_3 yang berisi kelipatan dari vektor $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Aksi T_A pada vektor di V_3 menghasilkan empat kalinya.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Lebih lanjut, jumlah ketiga subruang tersebut, yaitu $V_1+V_2+V_3$, adalah seluruh ruang R^3. Keistimewaan ini memberikan peluang untuk memecah operator linier T_A menjadi tiga buah operator linier pada masing-masing subruang V_1; V_2 dan V_3 dimana aksinya pada masing-masing subruang tersebut lebih sederhana, yaitu melipatkan vektor yang dilakukan tindakan.

Untuk sebarang operator linier T, suatu subruang yang memiliki struktur seperti subruang V_1; V_2; V_3 di atas, dimana aksi T pada vektor di dalamnya akan menghasilkan vektor yang kembali berada di subruang tersebut, kita namakan subruang *invariant* terhadap operator T atau disingkat subruang *invariant*. Secara umum, jika aksi operator linier pada suatu ruang vektor dapat menyebabkan terdekomposisinya seluruh ruang vektor menjadi sejumlah subruang *invariant* yang berdimensi satu, maka kita dapat memecah operator linier tersebut menjadi sejumlah

operator linier pada masing-masing subruang *invariant* dengan aksinya yang sederhana. Sangat disayangkan atau sebaliknya adalah suatu keberuntungan bahwa hal ini tidak selalu terjadi, sehingga banyak hal yang masih perlu dikaji, diteliti, dan dikembangkan lebih lanjut.

Pada kesempatan ini akan disampaikan tiga pengembangan yang telah saya lakukan bersama kolega dan mahasiswa terkait dengan subruang *invariant* dan generalisasinya, yaitu

1. Pengkajian tiga tipe subruang *invariant*: subruang *marked*, subruang *hyperinvariant*, dan subruang karakteristik.
2. Pengkajian matriks perbandingan berpasangan yang mempunyai peranan penting pada suatu metode pengambilan keputusan majemuk yang diberi nama *analytical hierarchy process* (AHP).
3. Pengembangan dan generalisasi subruang *invariant* ke modul.

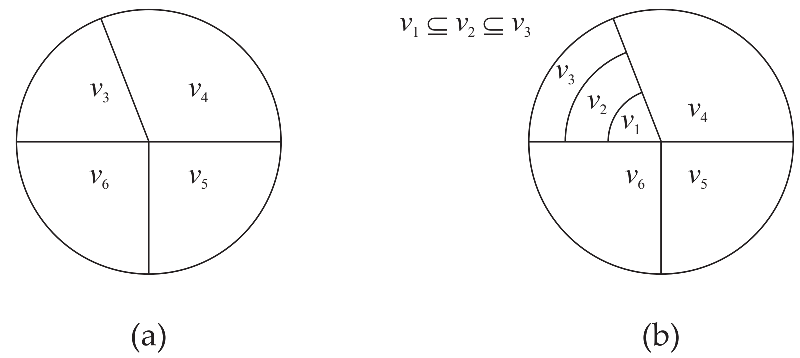
2 SUBRUANG *MARKED*, *HYPERINVARIANT* DAN KARAKTERISTIK

Penelitian saya bersama Prof. H.K.Wimmer dariWuerzburg, Republik Federal Jerman, berkaitan dengan subruang *invariant* menyangkut tiga tipe subruang *invariant*; yaitu subruang *marked*, subruang *hyperinvariant*, dan subruang karakteristik. Konsep subruang *marked* dapat dilihat di Gohberg dkk [30]. Konsep subruang *marked* dikembangkan antara lain untuk memahami dan memecah permasalahan yang terkait dengan ruang vektor dan operator linier secara bertahap. Kajian karakterisasi dan sifat-sifat subruang *marked* telah banyak dilakukan, misalnya di Bru dkk [15] dan Ferrer dkk [21]. Konsep subruang *marked* juga telah diperluas menjadi (C,A)-marked yang mempunyai aplikasi pada masalah kestabilan sistem kontrol linear [18].

Operator linier yang sederhana akan memecah atau mendekomposisi seluruh *domain* atau ranah ruang vektor menjadi sejumlah subruang *invariant* berdimensi satu. Selanjutnya, aksi operator pada masing-masing subruang *invariant* adalah melipatkan vektor dengan skalar. Misalkan *domain* ruang vektor diilustrasikan sebagai seluruh cakram pada Gambar 1(a) dan juring-juring dalam gambar tersebut mengilustrasikan subruang *invariant*. Perlu diketahui ilustrasi ini hanya sekedar perumpamaan yang tidak sepenuhnya tepat. Namun demikian saya yakin ilustrasi ini dapat memberikan penjelasan yang sederhana tentang subruang *invariant*, khususnya subruang *marked*.

Secara umum, sebarang operator linier mendekomposisi seluruh *domain* ruang vektor menjadi beberapa subruang *invariant* dengan dimensi sebarang. Bahkan ada suatu operator linier yang disebut nonderogatori dengan satu nilai karakteristik, untuk operator linier tersebut, seluruh ruang vektor tidak dapat lagi didekomposisi. Masing-masing subruang *invariant* pedekomposisi tidak dapat lagi didekomposisi menjadi subruang *invariant* yang lebih kecil dan saling lepas. Dalam hal ini, aksi operator linier pada subruang *invariant* yang berdimensi lebih

dari 1 masing belum sederhana.



Gambar1: Ilustrasi Subruang Marked

Salah satu cara untuk dapat lebih memahami aksi operator linier pada subruang *invariant* yang tidak dapat didekomposisi lagi adalah melalui barisan naik subruang *invariant* seperti yang diilustrasikan pada Gambar 1(b). Pada gambar tersebut, subruang V_3, misalnya berdimensi 3, tidak dapat lagi didekomposisi menjadi dua atau tiga buah subruang *invariant* dengan dimensi satu atau dua yang saling lepas. Dalam hal ini, jika dapat diperoleh subruang *invariant* V_1 dan V_2 dengan V_1 di dalam V_2 dan V_2 di dalam V_3 serta dimensi V_1 satu, dimensi V_2 dua dan dimensi V_3 tiga maka pemahaman aksi operator linier pada V_3 dapat diperoleh secara bertahap dari aksi pada V_1, aksi pada V_2 dan selanjutnya aksi pada V_3.

Ide dekomposisi seperti ilustrasi tersebut di atas antara lain yang diakomodasi oleh subruang *marked* dengan definisi formal sebagai berikut. Basis Jordan adalah basis ruang vektor terkait dengan bentuk kanonik Jordan suatu matriks yang diperkenalkan oleh Jordan dan Weirstrass, serta dapat digunakan untuk menunjukkan similaritas dua matriks [32].

Definisi 2.1.

Misalkan C menyatakan lapangan bilangan kompleks, V suatu ruang vektor atas lapangan C yang berdimensi hingga dan $T : V \longrightarrow V$ suatu operator linier. Suatu subruang T-invariant W disebut subruang marked jika W memiliki basis Jordan terhadap T yang dibatasi pada W yang dapat diperluas menjadi basis Jordan dari V terhadap T.

Secara formal subruang *marked* adalah subruang *invariant* yang dibangun dengan menggunakan suatu basis Jordan, khususnya sebagian unsur dalam suatu basis Jordan dikeluarkan dan disisanya digunakan untuk membangun subruang *marked* tersebut. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pada dasarnya subruang *marked* dapat dipandang sebagai fungsi dari basis Jordan seluruh ruang vektor dan barisan bilangan bulat tak negatif yang mengindikasikan anggota dari basis Jordan yang dikeluarkan dan berarti tidak menjadi anggota basis subruang *marked*. Dengan demikian, secara umum untuk dua buah basis Jordan yang berbeda dengan paramater barisan bilangan bulat yang sama, ada kemungkinan menghasilkan dua subruang *marked* yang berbeda.

Salah satu kajian yang kami lakukan adalah mencari kondisi atau syarat atau kriteria untuk subruang *marked* yang tidak bergantung pada

basis Jordan. Artinya mencari barisan bilangan bulat tak negatif, jika ada, sehingga subruang *marked* yang dibangun dengan barisan bilangan bulat tersebut dan sebarang basis Jordan akan tetap untuk semua basis Jordan yang mungkin. Kajian ini membawa kami pada perkenalan dengan dua jenis subruang *invariant* lainnya, yaitu subruang *hyperinvariant* dan subruang karakteristik. Khususnya, kita memperoleh hubungan ketiga subruang tersebut sebagaimana diperlihatkan dalam teorema berikut. Suatu subruang yang *invariant* terhadap operator linier *T* dikatakan *hyperinvariant* jika ia juga *invariant* terhadap semua operator linier yang komutatif dengan *T* (lihat [30], [33]) dan suatu subruang yang *invariant* terhadap operator linier *T* disebut subruang *karakteristik* jika ia juga *invariant* terhadap semua isomorfisma yang komutatif dengan *T* [31].

Teorema 2.2. (Astuti dan Wimmer [10] [11])

Misalkan $T : V \longrightarrow V$ suatu operator nilpotent pada ruang vektor berdimensi hingga V dengan semua pembagi elementernya adalah $s^{t_1}, \ldots, s^{t_k}$, $0 < t_1 \leq \cdots \leq t_k$ dan $0 \leq r_i \leq t_i, i = 1, \ldots, k$. Misalkan pula $\mathcal{U}$ adalah himpunan semua pembangun basis Jordan, $r = (r_1, \ldots, r_k)$ dan $W(r, U)$ adalah subruang marked yang dibangun oleh r dan pembangun basis Jordan $U \in \mathcal{U}$. Pernyataan berikut ekivalen.

*i. $W(r, U)$ tidak bergantung pada pembangun U,
artinya $W(r, U) = W(r, \tilde{U})$ untuk semua $\tilde{U} \in \mathcal{U}$.*

ii. $r = (r_1, \ldots, r_k)$ *dan* $(t_1 - r_1, \ldots, t_k - r_k)$ *bersifat*

$$0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_k$$

$$0 \leq t_1 - r_1 \leq t_2 - r_2 \leq \cdots \leq t_k - r_k$$

iii. $W(r, U)$ *adalah subruang karakteristik.*

iv. $W(r, U)$ *adalah subruang hyperinvariant.*

Teorema 2.2 menunjukkan syarat perlu dan cukup untuk subruang *marked* yang tidak bergantung pada basis Jordan. Khususnya syarat perlu dan cukup tersebut ada pada point *ii.*, dua barisan bilangan bulat tak negatif yang bersifat monoton tak turun. Seperti yang telah saya sampaikan sebelumnya, salah satu barisan bilangan bulat tak negatif tersebut mengindikasikan unsur-unsur dalam basis Jordan dari seluruh ruang vektor yang tidak termasuk sebagai basis dari subruang *marked*.

Teorema 2.2 juga berhasil memperlihatkan keterkaitan atau hubungan antara tiga buah tipe subruang, subruang *marked*, *hyperinvariant* dan karakteristik. Mengingat setiap subruang *hyperinvariant* adalah juga merupakan subruang karakteristik maka diperoleh akibat berikut.

Akibat 2.3. (Astuti dan Wimmer [11])
Marked + Karakteristik = Hyperinvariant

Aplikasi Teorema 2.2 yang kami kembangkan adalah untuk menentukan penyelesaian persamaan aljabar Riccati (*Algebraic Riccati*

Equation disingkat ARE) berbentuk

$$Q + F^*X + XF - XDX = 0 \qquad (2.1)$$

dengan *Q; F;D* adalah matriks atas lapangan kompleks berukuran *m x m*, *D* dan *Q* matriks Hermit dengan D ≥ 0 dan diasumsikan pasangan (*F*,*D*) terkontrol. Pada masalah *infinite-horizon* sistem kontrol linier yang *invariant* terhadap waktu, penentuan pengontrol optimal dengan fungsi biaya kuadratik pada akhirnya menyangkut penyelesaian ARE (2.1) yang bersifat Hermit [14]. ARE juga memegang peranan penting pada pengkajian teori kontrol H-*infinity*. Terkait dengan ARE ini, diperoleh teorema berikut yang merupakan aplikasi Teorema 2.2 di atas.

Teorema 2.4. (Astuti dan Wimmer [10])
Misalkan matriks Hamiltonian yang berkaitan dengan ARE (2.1) adalah

$$H = \begin{pmatrix} F & -D \\ -Q & -F^* \end{pmatrix}$$

merupakan matriks nilpotent dengan pembagi elementer $s^{2m_1}, \ldots, s^{2m_k}$. *Bentuk* $W = (\mathrm{Im}\, H^{m_1} \cap \mathrm{Ker}\, H^{m_1}) + \cdots + (\mathrm{Im}\, H^{m_k} \cap \mathrm{Ker}\, H^{m_k})$

Maka W adalah subruang dari C^{2m} *yang invariant terhadap H dengan Dim(W) = m. Misalkan pula Y,Z adalah dua buah matriks berukuran m x m sehingga kolom-kolom matriks* $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ *membentuk basis dari W maka Y nonsingular dan* $X = Y^{-1}Z$ *adalah solusi tunggal Hermit dari ARE (2.1).*

Subruang *W* dalam Teorema 2.4 adalah subruang *hyperinvariant* yang memenuhi persyaratan pada Teorema 2.2. Dalam Toerema 2.4 kami memberikan suatu alternatif cara memperoleh solusi ARE, yaitu solusi ARE dapat dikonstruksi dari basis subruang *hyperinvariant* W tersebut.

Hasil kajian di atas juga telah menjadi fenomena yang memberikan inspirasi kepada kami untuk meneliti lebih lanjut struktur dari ketiga tipe subruang *invariant*, termasuk hubungan antar mereka. Mengingat setiap subruang *hypeinvariant* adalah karakteristik, dicari lebih lanjut syarat bilamana subruang karakteristik bersifat *hyperinvariant* dan diperoleh hasil-hasil berikut yang telah dan sedang dipersiapkan untuk dipublikasikan di jurnal.

1. Untuk lapangan (sistem skalar) tumpuan yang berisi lebih dari 2 unsur, diperoleh bahwa setiap subruang karakteristik adalah *hyperinvariant* [31] [11].
2. Untuk lapangan tumpuan berisi dua unsur, yaitu Z_2, terdapat subruang karakteristik yang tidak *hyperinvariant* jika dan hanya jika bentuk kanonik Jordan dari operator linier terkait mengandung hanya satu blok Jordan berukuran R x R dan hanya satu blok Jordan berukuran S x S dengan $R + 1 < S$ [35] [12].
3. Deskripsi atau identifikasi suatu kelas subruang karakteristik yang tidak *hyperinvariant* [13].

3 MATRIKS PERBANDINGAN BERPASANGAN

Pengembangan yang kedua adalah suatu pemanfaatan sederhana

struktur subruang *invariant* untuk mengkaji matriks perbandingan berpasangan. Matriks perbandingan berpasangan (*pairwise comparison matrix* disingkat PCM) merupakan matriks positif resiprokal yang memegang peranan penting pada *Analytical Hierarchy Process* (AHP). AHP, dikembangkan oleh L. Saaty tahun 1980 [34], adalah suatu metode pembuat keputusan yang melibatkan banyak alternatif dan kriteria. Penerapan AHP pada masalah pengambilan keputusan dengan n buah alternatif keputusan atau kriteria akan menghasilkan PCM berukuran n x n. Komponen baris ke-i kolom ke-j dari PCM tersebut menyatakan rasio atau perbandingan dominasi alternatif keputusan atau kriteria ke-i terhadap alternatif keputusan atau kriteria ke-j.

Dalam AHP, nilai karakteristik terbesar dari matriks PCM beserta vektor karakteristik positifnya digunakan untuk mengidentifikasi urutan prioritas berbagai alternatif keputusan, kriteria atau subkriteria yang sedang ditelaah. Nilai karakteristik terbesar dari PCM juga digunakan untuk menentukan indeks konsistensi dari penyelesaian yang dikembangkan.

Berbagai penelitian telah banyak dilakukan tentang sifat-sifat dan struktur nilai karakteristik terbesar dan vektor karakteristiknya yang positif dari suatu PCM, termasuk metode menaksirnya [19], [20] [29]. Walaupun demikian, struktur ruang vektor nampaknya belum banyak dimanfaatkan pada hasil-hasil penelitian tersebut. Sehubungan dengan hal tersebut, kami menawarkan suatu alternatif memanfaatkan struktur subruang *invariant* pada pengkajian PCM.

AHP untuk permasalahan yang ideal akan menghasilkan PCM dengan rank 1 yang disebut PCM konsisten. Untuk kasus ini, nilai karakteristik dan vektor karakteristik positifnya dapat diperoleh dengan mudah. Pada kenyataannya, masalah pengambilan keputusan mengandung pandangan dan pertimbangan yang subjektif sehingga menghasilkan PCM yang tidak konsisten, biasanya disebut PCM terganggu.

Kajian yang kami lakukan baru pada PCM terganggu sederhana. Kajian kami tentang matriks PCM terganggu sederhana, menghasilkan bahwa matriks PCM mendekomposisi ruang vektor R^n menjadi jumlah langsung dua buah subruang *invariant*, yaitu subruang peta dan subruang inti. Keistimewaan ini memberikan peluang pencarian nilai dan vektor karakteristik PCM, termasuk pencarian polinom karakteristiknya cukup dibatasi pada ruang peta yang jauh lebih kecil dimensinya dibandingkan seluruh ruang vektor. Dari kajian tersebut, dapat diperoleh bentuk eksplisit vektor karakteristik positif PCM. Hasil tersebut selanjutnya dimanfaatkan lebih lanjut untuk melihat pengaruh gangguan pada terjadinya perubahan prioritas alternatif keputusan serta indeks konsistensi. Hasil kajian ini telah dipublikasikan dalam dua buah makalah yang diterbitkan di jurnal nasional dan internasional [27] dan [5] serta menjadi topik kajian tesis mahasiswa magister.

4 PERLUASAN KE TEORI MODUL

Salah satu pendekatan yang banyak dilakukan di dalam penelitian matematika adalah memperumum atau memperluas cakupan dari hasil-hasil penelitian yang telah ada pada kelas yang lebih besar. Jika suatu struktur, sifat, atau teorema A berlaku pada objek-objek dalam suatu kelas B dan kelas B adalah bagian dari kelas C, suatu hal yang sangat alamiah jika kita mempertanyakan apakah struktur, sifat, atau teorema A tersebut juga berlaku pada objek-objek di kelas C. Kita juga dapat mempertanyakan bagian mana dari struktur, sifat, atau teorema A yang masih berlaku pada C, atau adakah struktur, sifat, atau teorema yang serupa dengan A yang berlaku di C?

Sehubungan dengan pendekatan di atas kami telah mengembangkan hasil tentang subruang *invariant* ke dalam konteks teori modul. Teori modul dapat digunakan untuk mengkaji struktur operator linier. Proses investigasi operator linier menggunakan pendekatan teori modul jauh lebih elegan dibandingkan dengan pendekatan ruang vektor. Sejumlah hal yang perlu penurunan panjang dan teknis pada pendekatan ruang vektor, kadang kala dalam pendekatan dengan teori modul hal tersebut dapat diperoleh dengan melakukan sedikit analisis dari struktur modul yang dibangun. Teori modul juga dapat digunakan untuk mengkaji persamaan diferensial linier baik yang biasa maupun yang parsial. Dalam kajian sistem kontrol linier dengan pendekatan secara aljabar *(algebraic system theory)* atau pendekatan model *behavior* yang diperkenalkan oleh

Willems dan dikembangkan oleh Fuhrmann dkk, sistem yang dikaji ditransformasikan dan dipandang sebagai modul atas gelanggang operator seperti gelanggang polinom dan aljabarWeyl ([22], [36]).

Modul adalah suatu sistem matematika yang dapat dipandang sebagai generalisasi atau perluasan dari ruang vektor namun struktur dari sistem skalar tumpuan modul, biasanya disebut gelanggang *(ring)*, tidak 'secantik' struktur lapangan *(field)* yang merupakan sistem skalar tumpuan ruang vektor. Lapangan adalah gelanggang namun sebaliknya tidaklah benar. Dengan demikian ruang vektor adalah modul namun modul belum tentu ruang vektor.

Dalam pemikiran generalisasi atau perluasan tersebut dikaitkan dengan hasil-hasil yang telah ada tentang struktur subruang *marked* muncul pertanyaan struktur yang seperti apakah dalam sistem matematika modul yang serupa atau merupakan perluasan dari subruang *marked*? Lebih lanjut, apakah sifat-sifat dari subruang *marked* juga berlaku pada struktur di sistem modul tersebut?

Penelitian kami yang membahas pertanyaan di atas telah menghasilkan perluasan karakterisasi geometri subruang *marked* ke submodul regular atau *stacked* dan telah dipublikasikan dalam 2 jurnal internasional [8] [9]. Berikut akan kami sampaikan satu perluasan yang kami lakukan dari karakterisasi geometri subruang *marked* yang telah dihasilkan oleh Ferrer dkk seperti yang ditunjukkan dalam teorema berikut ke teori modul.

Teorema 4.1. (Ferrer, Puerta, dan Puerta [21])

Misalkan $T : V \longrightarrow V$ suatu operator linier pada ruang vektor berdimensi hingga V. Suatu subruang invariant W adalah subruang marked jika dan hanya jika berlaku untuk semua $d; h$

$$W \cap E_h^{d+1} + W \cap E_{h-1}^d = W \cap (E_h^{d+1} + E_{h-1}^d) \tag{4.1}$$

dengan $E_h^d = \mathrm{Ker}(T^h) \cap Im(T^d)$

Persamaan (4.1) adalah salah satu karakterisasi subruang *marked.*

Hasil tersebut telah dapat diperluas dalam konteks modul sebagaimana ditunjukkan dalam teorema berikut, khususnya butir 3.

Teorema 4.2. (Astuti dan Wimmer [9])

MisalkanM suatu modul torsi atas suatu daerah valuasi diskrit dengan unsur prim p dan W submodul dari M. Pernyataan berikut ekuivalen.

1. *W bersifat reguler, yaitu jika $n \geq 0, r \geq 0$ maka*

$$p^n W \cap p^{n+r} M = p^n (W \cap p^r M)$$

2. *Jika $x \in W$ unsur tak nol maka x dapat didekomposisi sebagai*

$$x = y_{k_1}^{s_1} + \cdots + y_{k_m}^{s_m}$$

dengan $y_{k_i}^{s_i} \in W$ unsur reguler, $\mathrm{h}(y_{k_i}^{s_i}) = s_i, \mathrm{e}(y_{k_i}^{s_i}) = k_i$, $i = 1, \ldots, m$, $k_1 > \cdots > k_m$ dan $s_1 > \cdots > s_m$.

3. *Jika* $s \geq 0, k \geq 1$ *maka*

$$W \cap M_k^{s+1} + W \cap M_{k-1}^s = W \cap (M_k^{s+1} + M_{k-1}^s) \tag{4.2}$$

dengan $M_k^s = p^s M \cap M[p^k]$.

Dalam pendekatan perluasan hasil penelitian pada kelas yang lebih besar, sejumlah penelitian juga telah dilaksanakan bersama kolega dan mahasiswa dalam topik teori modul dan gelanggang tumpuannya. Hasil-hasil yang telah diperoleh adalah sebagai berikut.

1. Hasil kajian tentang struktur matriks polinom serta struktur homomorfisma antar modul yang dibangun oleh matriks polinom yang mengandung pembagi elementer takhingga. Hasil ini diinspirasi oleh hasil yang ada di sistem kontrol linier dan sistem dekriptor *(descriptor system)* ([4] [6], [7]). Kelanjutan dari hasil ini, suatu topik dalam teori sistem aljabar dalam konteks *behavior* menjadi topik penelitian salah satu mahasiswa doktor.
2. Hasil kajian tentang struktur gelanggang polinom miring atas daerah Dedekind ([1], [2], dan [3]). Hasil ini merupakan hasil mahasiswa doktor dengan saya sebagai promotor dan juga merupakan penelitian kerjasama antara KK Aljabar FMIPA ITB dengan Prof. H. Marubayashi, dari Bunri University, Jepang. Salah satu jenis gelanggang polinom miring adalah aljabar Weyl yang banyak dimanfaatkan sebagai gelanggang tumpuan kajian sistem kontrol linier secara aljabar.

3. Hasil kajian tentang struktur berbagai tipe modul dan komodul, khususnya modul dan komodul herediter dan koherediter, serta modul Dedekind ([23], [24], [25], [26], [28]). Hasil ini juga merupakan pekerjaaan mahasiswa doktor yang telah selesai dan saya sebagai promotornya. Kelanjutan dari penelitian ini tentang modul Dedekind dan modul valuasi sedang ditawarkan kepada calon mahasiswa doktor yang tertarik melakukan penelitian di bidang aljabar.

5 PENUTUP

Aljabar linier dan teori modul, khususnya teori modul atas gelanggang polinom dan bentuk rasional yang walaupun merupakan bagian dari matematika murni tetapi banyak dimanfaatkan sebagai kerangka kerja dalam pengkajian berbagai bidang seperti sistem kontrol linier. Sistem kontrol linier dan aplikasinya rekayasa kontrol merupakan bidang yang dikembangkan di sejumlah fakultas dan sekolah di ITB karena aplikasinya yang sangat luas. Penguatan aljabar linier dan teori modul dapat dipandang sebagai dukungan pada pengembangan bidang yang banyak ditekuni di ITB tersebut. Sebagai anggota dari kelompok keilmuan Aljabar di FMIPA ITB yang menekuni bidang aljabar linier dan teori modul, saya akan terus melaksanakan penelitian di bidang ini. Kegiatan penelitian juga akan terus disinergikan dengan kegiatan pendidikan melalui pengkajian dan pemanfaatan topik dan hasil-hasil penelitian pada kegiatan perkuliahan dan pembimbingan tugas akhir, tesis dan disertasi.

Disisi lain, ITB yang bercita-cita untuk menjadi *world class university* yang berkebangsaan, perlu meningkatkan partisipasinya pada kegiatan pengembangan ilmu pengetahuan, teknologi, dan seni di tingkat international. Di tingkat internasional, aljabar linier dan teori modul masih merupakan area yang aktif dan menarik banyak peneliti untuk mengembangkannya. Pelaksanaan kegiatan penelitian di bidang aljabar linier dan teori modul di KK Aljabar akan terus dilaksanakan dan ditingkatkan sebagai bagian dari partisipasi KK Aljabar pada usaha ITB tersebut.

6 UCAPAN TERIMA KASIH

Menjelang saya akhiri pidato ilmiah ini, perkenankan saya menyampaikan terima kepada semua pihak yang telah mendidik, membimbing, membantu, mendukung, dan bekerjasama dengan saya sehingga akhirnya saya mendapat kepercayaan amanah jabatan guru besar bidang aljabar linier pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Bandung.

Pertama-tama saya panjatkan puji syukur, *alhamdulillah*, atas kepercayaan amanah jabatan guru besar yang saya terima, suatu jabatan

yang terhormat dan sangat berat tanggung jawabnya. Untuk itu saya berdoa kepada Allah SWT semoga Allah SWT selalu memberi saya kekuatan, ketuguhan hati, dan kemudahan menjalan amanah guru besar dengan baik.

Terima kasih saya sampaikan kepada pimpinan dan anggota Majelis Guru Besar Institut Teknologi Bandung atas kesempatan yang diberikan kepada saya untuk menyampaikan pidato ilmiah di hadapan sidang Majelis Guru Besar ITB yang sangat terhormat ini dan atas bantuan dan dukungan yang diberikan pada saat pengusulan jabatan guru besar saya.

Saya sampaikan terima kasih kepada pimpinan dan anggota Senat Akademik ITB, pimpinan ITB, Prof. Dr. Djoko Santoso dan jajarannya waktu pengusulan guru besar saya, Rektor Prof. Dr. Akhmaloka dan jajarannya, mantan Dekanat dan Dekanat FMIPA ITB: Dr. Idam Arif, Prof. Dr. Khairurrijal, Dr. Umar Fauzi, Dr. Fida M. Warganegara, Dr. Yudi Soeharyadi, Dr. Indra Noviandri, Dr. Hilda Assiyatun; pimpinan dan anggota Senat FMIPA, para promotor saya Prof. Dr. M. Ansyar, Prof. Dr. Edy Tri Baskoro, Prof. Dr. Edy Soewono, Prof. Dr. Ismunandar, Prof. Dr. Djulia Onggo atas bantuan dan dukungan yang diberikan pada pengusulan jabatan guru besar saya.

It is a pleasure to express my gratitute to Prof. Dr. H.K. Wimmer for our enjoyable and productive collaboration for more then ten years. I would also like to thank Prof. H. Marubayashi for the collaboration.

Ucapan terima kasih dan penghargaan yang tinggi saya sampaikan kepada guru-guru saya yang telah dengan tulus mendidik saya hingga menjadi seperti sekarang; para guru saya di SD Kedungwuluh III Purwokerto, di SMP Negeri I Purwokerto, di SMA Negeri I Purwokerto, di Departemen Matematika FMIPA ITB, di Department of Mathematics dan Faculty of Engineering and Information Technology Australian National University; khususnya para pembimbing saya, Prof. Dr. Achmad Arifin, Prof. Dr. M. Asyar, Dr. Rick Loy, Prof. Dr. Darrell Williamson, dan Dr. Brenan McCarragher; juga kepada guru saya Prof. Dr. Moedomo, Prof. Dr. Maman A. Djauhari, dan Dra. Widiarti. Terima kasih juga saya sampaikan kepada rekan-rekan sejawat; rekan-rekan sesama staf pengajar pemain matematika di FMIPA ITB termasuk rekan-rekan di KK Aljabar: Prof Dr. Irawati, Dr. Ahmad Muchlis, Dr. Intan D. Muchtadi, Dr. Hanni Garminia, Aleams Barra, M.Si, Dellavitha Nasution, M.Si, dan Fajar Yuliawan M.Si; rekan-rekan di IndoMS dan Himpuanan Peminat Aljabar, khususnya Prof. Dr. Sri Wahyuni, Prof. Dr. Budi Nurani dan Dr. Siti Fatimah; terima kasih atas kebersamaan yang kita jalani selama ini. Capaian saya sekarang ini juga tak lepas dari interaksi saya dengan mahasiswa. Untuk itu saya sampaikan terima kasih kepada seluruh mahasiswa bimbingan saya yang tidak dapat saya sebutkan satu-persatu, terima kasih atas kesempatan yang diberikan kepada saya untuk menjadi pembimbing.

Ucapan terima kasih yang tak terhingga saya sampaikan kepada kedua orang tua saya, H. Achmad Waluyo almarhum dan Hj. Siti Fatimah almarhumah, terima kasih untuk kasih sayang, bimbingan, pendidikan

dan teladan yang diberikan untuk selalu amanah dan kerja keras. Saya sangat beruntung menjadi putri beliau. Terima kasih juga saya sampaikan kepada ayah-ibu mertua saya Bpk Jaja Kartawiria almarhum dan Hj. Dewi Lesmanah, kepada sebelas saudara kandung saya dan enam saudara ipar beserta keluarga, terima kasih untuk persaudaraan yang hangat.

Terakhir tapi karena memang untuk yang istimewa, terima kasih saya sampaikan kepada anak-anak dan suami. Terima kasih untuk putri-putri saya, Emily dan Sonya yang manis dan pengertian yang membuat saya makin mantap berkarya di dunia matematika. Terima kasih kepada suami tercinta Agah D. Garnadi untuk kasih sayang, pimpinan, bantuan dan dukungan yang diberikan selama ini sehingga akhirnya saya diberi kesempatan menyampaikan pidato ilmiah di forum terhormat ini.

Akhirnya saya sampaikan terima kasih kepada seluruh sivitas akademika ITB dan semua pihak yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu yang telah berkontribusi pada perkembangan diri saya. Saya tutup pidato ilmiah ini dengan ucapan terima kasih kepada seluruh hadirin atas perhatian yang diberikan selama saya menyampaikan pidato ilmiah ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] A.K. Amir, P. Astuti, dan I. Muchtadi-Alamsyah, Minimal Prime Ideals of Ore Over commutative Dedekind Domain, *JP. Journal of Algebra,*

Number Theory and applications, **16** (2010), 101–107.

[2] A.K. Amir, H. Marubayashi, P. Astuti, dan I. Muchtadi-Alamsyah, Corrigenum to Minimal Prime Ideals of Ore Extension Over commutative Dedekind Domain and its Applications, *JP. Journal of Algebra, Number Theory and applications*, **21** (2011), 41–44.

[3] A. K. Amir, P. Astuti, I. Muchtadi-Alamsyah, dan Irawati, On Maximal Order and Factor Rings of Ore Extension over Commutative Dedekind Domain, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, (2011) (accepted).

[4] P. Astuti, Sekitar Matriks Suku Banyak Taksingular, *Majalah Ilmiah Himpunan Matematika Indonesia*, **5** (1999), 11 – 21.

[5] P. Astuti dan A.D. Garnadi, On Eigevalues and Eigenvectors of Perturbed Pairwise Comparison Matrices, *ITB Journal of Science*, **41** (2009), 69–77.

[6] P. Astuti dan H.K. Wimmer, Homomorphisms of Modules Associated with Polynomial Matrices with Infinite Elementary Divisors, *Systems and Control Letters*, 44 (2001), 333 – 337.

[7] P. Astuti dan H.K.Wimmer, Pair of Modules over a Principle Ideal Domain, *Majalah Ilmiah Himpunan Matematika Indonesia*, **7** (2001), 1–7.

[8] P. Astuti dan H.K. Wimmer, Stacked Submodules of Torsion Modules over Discrete Valuation Domains, *Bull. of Australian Math. Soc.*, **68** (2003), 439 – 447.

[9] P. Astuti dan H. K.Wimmer, Regular Submodules of Torsion Modules over a Discrete Valuation Domain, *Czechoslov. Math. J.*, **56** (2006), 349–357.

[10] P. Astuti dan H. K. Wimmer, A Class of Marked Invariant Subspaces with an Application to Algebraic Riccati Equations, *Automatica*, **42**

(2006), 1503–1506.

[11] P. Astuti dan H. K. Wimmer, Hyperinvariant, Characteristic and Marked Subspaces, *Oper. Matrices*., **3** (2009), 261–270.

[12] P. Astuti dan H. K. Wimmer, Characteristic Subspaces that are not Hyperinvariant Subspaces over the Field GF(2), *Linear Algebra Appl.*, (2011) *(in press)*.

[13] P. Astuti dan H. K. Wimmer, A Class of Characteristic Invariant Subspaces that are not Hyperinvariant, *(in preparation)*.

[14] S. Barnett dan R.G Cameron, *Introduction to Mathematical Control Theory*, Clarendon Press, Oxford, (1985).

[15] R. Bru, L. Rodman, dan H. Schneider, Extensions of Jordan Bases for invariant Subspaces of a Matrix, *Linear Algebra Appl.*, 150 (1991), 209–226.

[16] L. Corry, Invariant Theory (English version), *in Encyclopaedia Italiana - Storia della Scienza*, Vol. VII (2003), 1025–1029.

[17] L. Corry, From Algebra (1895) to Moderne Algebra (1930): Changing Conceptions of a Discipline. A Guided Tour Using the Jahrbuch ber die Fortschritte der Mathematik, *in J. Gray and K.H. Parshall (eds.), Commutative Algebra and its History: Nineteenth and Twentieth Century*, Providence, American Mathematical Society/London Mathematical Society, (2006).

[18] A. Compta dan M. Peña, Structural Stability of (*C;A*)-marked Subspaces, *Linear Algebra Appl.*, **421** (2007), 45–52.

[19] M.T. Chu, On the Optimal Consistent Approximation to Pairwise Comparison Matrices, *Linear Algebra Appl.*, **272** (1998), 155–168.

[20] András Farkas, The Analysis of the Principal Eigenvector of Pairwise

Comparison Matrices, *Acta Polytechnica Hungarica*, **4** (2007).

[21] J. Ferrer, F. Puerta, dan X. Puerta, Geometric Characterization and Classification of Marked Subspaces, *Linear Algebra Appl.*, **235** (1996), 15–34.

[22] P.A. Fuhrmann, P. Rapisarda, dan Y. Yamamoto, On the State of Behaviors, *Linear Algebra Appl.*, **424** (2007), 570–614.

[23] H. Garminia dan P. Astuti, Karakterisasi Modul σ [M]-Koherediter, *Majalah Ilmiah Himpunan Matematika Indonesia*, **12** (2006), 225–231.

[24] H. Garminia, P. Astuti, dan Irawati Properties of Cohereditary Comodule, *Jurnal Matematika dan Sains*, **12** (2007),79–83.

[25] H. Garminia, P. Astuti, dan Irawati, Struktur Modul Hasil Bagi dari Modul Dedekind, *Jurnal Matematika dan Sains*, **13** (2008), 114–117.

[26] H. Garminia, P. Astuti, dan Irawati, An Intertwinning of a Hereditary Algebra and a Cohereditary Coalgebra, *Journal of Fundamental Science*, **4**(2008), 261–267 .

[27] H. Garminia, Moh. Hafiyusholeh, dan P. Astuti, Pengaruh Gangguan pada Perubahan Prioritas dan Indeks Konsistensi Matriks Perbandingan Berpasangan dalam Analytical Hierarchy Process, *Jurnal matematika dan Sains*, **15** (2010), 143 - 147.

[28] H. Garminia, P. Astuti, dan Irawati, A Note on Dedekind Modules, *International Journal of Algebra*, **5** (2011), 491 – 498.

[29] S.I. Gass dan T. Rapcs´ak, Singular value decomposition in AHP, *European Journal of Operational Research*, **154** (2004), 573 – 584.

[30] I. Gohberg, P. Lancaster, dan L. Rodman, *Invariant Subspaces of Matrices with Applications*, Wiley, New York, (1986).

[31] I. Kaplansky, *Infinite Abelian Groups*, University of Michigan Press,

Ann Arbor, (1954).

[32] I. Kleiner, *A History of Abstract Algebra*, Birkhauser, (2007).

[33] W. E. Longstaff, A lattice-theoretic description of the lattice of hyperinvariant subspaces of a linear transformation, *Can. J. Math.*, **28** (1976), 1062–1066.

[34] T.L. Saaty, *The Analytical Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York, 1980.

[35] K. Shoda, Ü ber die characteristischen Untergruppen einer endlichen Abelschen Gruppe, *Math. Zeit.*, **31** (1930), 611–624.

[36] E. Zerz, *Algebraic Systems Theory*, Lehrstuhl fur Mathematik RWTH Aachen, (2006).

CURRICULUM VITAE

Nama	:	**PUDJI ASTUTI WALUYO**
Tempat, tgl lahir	:	Purwokerto, 1 April 1961
Alamat Kantor	:	KK Aljabar, FMIPA Institut Teknologi Bandung Jl. Ganesa 10, Bandung 40132
e-mail	:	pudji@math.itb.ac.id
Nama Suami	:	Agah D. Garnadi, Drs., Grad.Dip.Sc.
Nama Anak	:	Emily Mar'atusalihat, ST, M.Sc. Sonya Mar'atusalihat, dr.

PENDIDIKAN:

1. Sarjana, bidang Matematika, Institut Teknologi Bandung, lulus 1984.
2. Magister, bidang Matematika, Institut Teknologi Bandung, lulus 1987.
3. Graduate Diploma in Science, bidang Matematika, Australian Nasional University, lulus 1992.
4. Doctor of Philosophy, bidang *Engineering* (Sistem Kontrol), Australian National University, lulus 1997.

RIWAYAT JABATAN FUNGSIONAL DI FMIPA ITB

- 2010 - : Guru Besar

- 2002 - 2010 : Lektor Kepala
- 1998 - 2002 : Lektor
- 1996 - 1998 : Lektor Muda
- 1990 - 1996 : Asisten Ahli
- 1987 - 1996 : Asisten Ahli Madya

PENGALAMAN PEKERJAAN

1. Staf Pengajar ITB, Januari 1986 - sekarang
2. Dekan Sekolah Pascasarjana ITB, Januari 2011 - sekarang
3. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam ITB, 2010.
4. Anggota Senat FMIPA ITB, 2011.
5. Wakil Dekan bidang Akademik, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), ITB, Januari 2006 - Januari 2010.
6. Pembimbing magang penelitian/pengajaran dalam bidang aljabar untuk staf muda dari UNHAS, UNDIP, UNNES, UGM, UNAIR.
7. *Team Leader*, Tim Indonesia ke International Mathematics Competition for Undergraduate Student di Macedonia, 2004.
8. Pembina, Pembinaan tim Olimpiade Matematika Mahasiswa Indonesia, 2003 - 2007.
9. Ketua Departemen Matematika, FMIPA ITB, Maret 2002 - Desember 2005.
10. *Technical Assistance* bidang Aljabar, Development Undergraduate Education (DUE-like) Project FPMIPA, Universitas Negeri Padang, Agustus 2002.

11. Sekretaris Departemen Matematika, FMIPAITB, Mei 2001 - Februari 2002.
12. *Technical Assistance* bidang Aljabar, Development Undergraduate Education (DUE-like) Project FMIPA, Universitas Negeri Sebelas Maret, Oktober 2001.
13. Bendahara, Development Undergraduate Education (DUE-like) Project, Program TPB, ITB (Jan. 2001 - Des 2001).
14. *Person in Charge*, DUE-like Project, Program TPB, ITB (April 1999 - Dec. 2000)
15. *Person in Charge*, Proyek QUE, Matematika, ITB, Maret 1999 - Februari 2000, kegiatan : Improving course management and solving bottle neck problems.
16. *Short-term fellowship to visit the Federal Republic of Germany*, Dibiayai oleh DAAD (Mei - Juli 1999).
17. Anggota tim pengembangan kurikulum Program Sarjana Matematika ITB, September 1997 - Agustus 1998.
18. *Research Assistant*, Dept. Engineering, Faculty Eng. Inf. Tech., ANU, 1995.
19. *Teaching Assistant*, Dept. Engineering, Faculty Eng. Inf. Tech., ANU, 1994.

KEANGGOTAAN DALAM ORGANISASI PROFESI

1. Himpunan Matematika Indonesia
2. IEEE (1992 - 1995)
3. SIAM (1992 - 1995)

PENGHARGAAN DAN SEJENISNYA

1. Ganesa Wira Adiutama dari Institut Teknologi Bandung, 2011.
2. Satyalancana Karya Satya XX Tahun dari Pemerintah RI, 2007.
3. Amelia Earhart Fellowship dari Zonta International Foundation, 1993.